

**Julie DÉSERTI**

---

**AUTOMORPHISMES D'ENTROPIE  
POSITIVE, LE CAS DES SURFACES  
RATIONNELLES**

---

Julie DÉSERTI

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, Projet Géométrie et Dynamique,  
Site Chevaleret, Case 7012, 75205 Paris Cedex 13, France.  
deserti@math.jussieu.fr

---

*Keywords* : Birational maps, birational geometry, iteration problems, topological entropy,  
rotation domains and linearization, FATOU sets.

---

## Introduction

Si  $f$  est un automorphisme sur une surface complexe compacte  $Z$  d'entropie topologique positive, alors ou bien la dimension de KODAIRA de  $Z$  est nulle et dans ce cas  $f$  est conjugué à un automorphisme de l'unique modèle minimal de  $Z$  qui doit être un tore, une surface K3 ou une surface d'ENRIQUES ; ou bien la surface  $Z$  est rationnelle non minimale et  $f$  est birationnellement conjuguée à une transformation birationnelle du plan ([Can99]). Le cas des surfaces K3 a été en particulier étudié par [Can01, McM02, Ogu, Sil91, Wan95]. Un des premiers exemples donné dans le contexte des surfaces rationnelles est dû à COBLE ([Cob61]) ; nous en reparlerons au Chapitre 3. Donnons un autre exemple bien connu : soient  $\Lambda = \mathbb{Z}[i]$  et  $E = \mathbb{C}/\Lambda$ . Le groupe  $SL_2(\Lambda)$  agit linéairement sur  $\mathbb{C}^2$  et préserve le réseau  $\Lambda \times \Lambda$  ; par suite tout élément  $A$  de  $SL_2(\Lambda)$  induit un automorphisme  $f_A$  sur  $E \times E$  qui commute avec  $\iota(x, y) = (ix, iy)$ . L'automorphisme  $f_A$  se relève en un automorphisme  $\tilde{f}_A$  sur la désingularisée de  $(E \times E)/\iota$ , qui est une surface de KUMMER. Cette surface est rationnelle et l'entropie de  $\tilde{f}_A$  est positive dès que le module de l'une des valeurs propres de  $A$  est strictement plus grand que 1.

On va s'intéresser aux surfaces obtenues en éclatant le plan projectif complexe en un nombre fini de points ; ceci est justifié par le théorème de NAGATA ([Nag60], Theorem 5) : soient  $Z$  une surface rationnelle et  $f$  un automorphisme sur  $Z$  tel que  $f_*$  soit d'ordre infini ; alors il existe une suite d'applications holomorphes  $\pi_{j+1} : Z_{j+1} \rightarrow Z_j$  telles que  $Z_1 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,  $Z_{N+1} = Z$  et  $\pi_{j+1}$  soit l'éclatement de  $p_j \in Z_j$ . De telles surfaces sont appelées *surfaces rationnelles basiques*. Néanmoins une surface obtenue à partir de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  après des éclatements génériques n'a pas d'automorphisme non trivial ([Hir88, Koi88]).

Dans [McM07] MCMULLEN, en s'appuyant sur des travaux de NAGATA et HARBOURNE, donne un analogue du théorème de TORELLI pour les surfaces K3 : il construit des automorphismes sur certaines surfaces rationnelles en prescrivant l'action de l'automorphisme sur les groupes de cohomologie de la surface. Ces surfaces sont des surfaces rationnelles possédant, à facteur multiplicatif près, une unique 2-forme méromorphe  $\Omega$  qui ne s'annule pas. Si  $f$  est un automorphisme sur  $Z$  obtenu via cette construction,  $f^*\Omega$  est proportionnelle à  $\Omega$  et  $f$  préserve le lieu des pôles de  $\Omega$ . Notons que lorsqu'on projette  $Z$  sur le plan projectif complexe,  $f$  induit une transformation birationnelle qui préserve une cubique.

Dans [BK06, BK09, BKa] le point de vue est quelque peu différent. Les auteurs considèrent des transformations birationnelles de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et ajustent les coefficients de celles-ci afin de trouver une suite finie d'éclatements  $\pi: Z \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  telle que l'application induite  $f_Z = \pi^{-1} f \pi$  soit un automorphisme de  $Z$ . Alors ils calculent le premier degré dynamique et établissent si la famille est triviale ou non. Certains de leurs travaux sont inspirés par [HV00b, HV00a, Tak01a, Tak01b, Tak01c]. Notons que la construction de McMullen ne permet pas d'obtenir tous les automorphismes construits par BEDFORD et KIM. Ces derniers produisent en particuliers des exemples ne préservant aucune courbe mais aussi des familles continues. Ils montrent des propriétés de nature dynamique comme par exemple la coexistence de domaines de rotation de rang 1 et 2.

Dans [DG10] les auteurs utilisent la théorie générale des déformations des variétés complexes pour décrire explicitement les petites déformations des surfaces rationnelles. Cela leur permet de donner un critère simple pour compter le nombre de paramètres d'une déformation d'une surface rationnelle basique donnée. Ils étudient ensuite une famille de transformations birationnelles  $(\Phi_n)_{n \geq 2}$ ; ils construisent, pour tout  $n$ , deux points infiniment proches  $\hat{P}_1$  et  $\hat{P}_2$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ayant la propriété suivante :  $\Phi_n$  induit un isomorphisme entre  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en  $\hat{P}_1$  et  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en  $\hat{P}_2$ . Ensuite ils donnent des conditions générales portant sur  $\Phi_n$  permettant de trouver des automorphismes  $\varphi$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  tels que  $\varphi \Phi_n$  soit un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en  $\hat{P}_1$ ,  $\varphi(\hat{P}_2)$ ,  $(\varphi \Phi_n) \varphi(\hat{P}_2)$ , ...,  $(\varphi \Phi_n)^k \varphi(\hat{P}_2) = \hat{P}_1$ . Ils appliquent cette méthode à d'autres transformations que  $\Phi_n$ . Cette démarche n'étant pas propre à  $\Phi_n$  ils l'appliquent à d'autres transformations.

Dans un premier chapitre nous rappelons des propriétés des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  et des transformations birationnelles du plan projectif complexe. Dans le second nous donnons quelques résultats de géométrie birationnelle comme le théorème de factorisation de ZARISKI, la notion de dimension de KODAIRA, la description des surfaces complexes compactes kählériennes. Ensuite nous rappelons des énoncés de linéarisation, des propriétés des automorphismes d'entropie positive, la notion de composantes de FATOU etc. Le chapitre 4 est consacré au travail de MCMULLEN ([McM07]), les chapitres 5 et 6 aux résultats de BEDFORD et KIM ([BK09, BKa, BKb]) et le dernier à [DG10].

**Remerciements.** Je tiens à remercier D. CERVEAU pour sa générosité, ses encouragements et son enthousiasme permanents. Merci à P. SAD pour son invitation au sud de l'équateur, les séminaires bis... et à J. GRIVAUX pour sa précieuse aide. Merci à l'IMPA pour son accueil formidable et au CNRS pour la délégation qui m'a permis de réaliser ce projet.

## Table des matières

Introduction	1
Remerciements	2
Chapitre 1. Groupe des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ et groupe de CREMONA	5
1. Groupe des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$	5
2. Groupe des transformations birationnelles	7
Chapitre 2. Un peu de géométrie algébrique	17
1. Quelques définitions et propriétés	17
2. Théorème de factorisation de ZARISKI	20
3. Matrices caractéristiques	22
4. Dimension de KODAIRA	23
Chapitre 3. Un peu de dynamique	25
1. Linéarisation	25
2. Où chercher des automorphismes d'entropie positive ?	26
2.1. Entropie topologique	26
2.2. Un théorème de CANTAT	27
2.3. Cas des surfaces rationnelles non minimales	28
3. Propriétés d'un automorphisme d'entropie positive	29
4. Trois involutions	29
4.1. Étude de $\sigma$	30
4.2. Étude de $\rho$	33
4.3. Étude de $\tau$	36
5. Ensembles de FATOU	39
5.1. Définitions et propriétés	39
5.2. Ensemble de FATOU des automorphismes de HÉNON	40
5.3. Ensemble de FATOU des automorphismes d'entropie positive sur les tores, (quotients de) $K3$ , surfaces rationnelles	41
Chapitre 4. Automorphismes d'entropie positive et groupes de WEYL	43
1. Groupes de WEYL	43

1.1. Groupes de WEYL, I	43
1.2. Groupes de WEYL, II	45
1.3. Éléments de COXETER et nombres de SALEM	47
2. Cubiques marquées, éclatements marqués, paires marquées	48
2.1. Cubiques marquées	48
2.2. Éclatements marqués	49
2.3. Paires marquées	51
3. Résultats et idée de démonstration	52
4. Exemples	53
Chapitre 5. Exemples d'automorphismes d'entropie positive	55
1. Construction de surfaces et d'automorphismes	58
2. Courbes invariantes	59
3. Domaines de rotation	61
4. Groupe de WEYL	62
5. Description des conditions pour obtenir un automorphisme	62
Chapitre 6. D'autres exemples	65
1. Familles continues d'automorphismes d'entropie positive	65
1.1. Construction de surfaces rationnelles et d'automorphismes	65
1.2. Une famille de systèmes dynamiques	69
1.3. D'autres résultats	71
2. Dynamique des automorphismes d'entropie positive : domaines de rotation	72
2.1. Énoncés	72
2.2. Construction des automorphismes et des surfaces	73
Chapitre 7. Une autre façon de construire des automorphismes d'entropie positive	77
1. Construction	77
1.1. Définitions de $\hat{P}_1, \hat{P}_2$	77
1.2. Conditions de recollement	81
2. Une première famille d'automorphismes	82
3. D'autres exemples	84
Index	87
Bibliographie	89

## CHAPITRE 1

# Groupe des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ et groupe de CREMONA

### 1. Groupe des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$

Un *automorphisme polynomial* de  $\mathbb{C}^2$  est une application bijective de la forme suivante

$$\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y)), \quad f_i \in \mathbb{C}[x, y].$$

L'ensemble de ces automorphismes forme un groupe, appelé *groupe des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$* , que nous noterons  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ .

Introduisons deux sous-groupes naturels de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$

$$E = \{(x, y) \mapsto (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \alpha\beta \neq 0, P \in \mathbb{C}[y]\},$$

$$A = \{(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2) \mid a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\}.$$

On dit que  $A$  est le *groupe des automorphismes affines* et  $E$  le *groupe des automorphismes élémentaires* ; ce sont les exactement les automorphismes qui préservent le feuilletage « horizontal »  $dy = 0$ .

Soit  $S = A \cap E$  le *groupe des automorphismes affines triangulaires*

$$S = \{(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y + c_1, b_2y + c_2) \mid a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}, a_1b_2 \neq 0\}.$$

Le groupe  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  a une structure de produit amalgamé.

**Théorème 1.1 ([Jun42]).** *Le groupe  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  est le produit amalgamé des sous-groupes  $A$  et  $E$  le long de leur intersection  $S$ .*

*Autrement dit tout élément  $\phi$  de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2] \setminus S$  s'écrit  $(a_1)e_1 \dots a_n(e_n)$  avec  $a_i$  dans  $A \setminus E$ ,  $e_i$  dans  $E \setminus A$ ; de plus, cette écriture est unique modulo les relations naturelles*

$$a_i e_i = (a_i s)(s^{-1} e_i), \quad e_{i-1} a_i = (e_{i-1} s')(s'^{-1} a_i), \quad s, s' \in S.$$

**Remarque 1.2.** Hormis dans certains cas (cas résonants) un automorphisme élémentaire est conjugué à un automorphisme affine. Cependant il existe dans  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  des éléments non conjugués à des automorphismes affines ; c'est par exemple le cas des *automorphismes de HÉNON généralisés*

$$(y, P(y) - \delta x), \quad \delta \in \mathbb{C}^*, P \in \mathbb{C}[y], \deg P \geq 2,$$

qui s'écrivent aussi  $(y, x)(-\delta x + P(y), y)$  avec  $(y, x)$  dans  $A \setminus E$  et  $(-\delta x + P(y), y)$  dans  $E \setminus A$ . À l'aide du théorème de JUNG, FRIEDLAND et MILNOR ont démontré l'énoncé suivant.

**Proposition 1.3 ([FM89]).** *Soit  $f$  un automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^2$ . On a l'alternative*

- *$f$  est conjugué à un élément de  $E$ ;*
- *$f$  est conjugué à une composée d'applications de HÉNON généralisées, i.e.*

$$f = \varphi g_1 \dots g_n \varphi^{-1}$$

où  $\varphi$  est dans  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  et les  $g_i$  des applications de HÉNON généralisées.

Dans le premier cas  $f$  est dit *de type élémentaire*, dans le second *de type HÉNON*;  $\mathcal{H}$  désigne le semi-groupe des composées d'applications de HÉNON généralisées.

**Remarque 1.4.** Les automorphismes affines sont de type élémentaire (triangulation des matrices).

Nous allons voir que cette dichotomie type élémentaire/type HÉNON se poursuit :

- Tout élément de type élémentaire préserve une fibration rationnelle alors qu'un automorphisme de type HÉNON n'en préserve pas.
- Les automorphismes de type élémentaire ont tous un centralisateur non dénombrable (en fait presque tous se plongent dans un groupe à un paramètre de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ ) alors que le centralisateur d'un automorphisme de type HÉNON est dénombrable, souvent même réduit à ses itérés ([Lam01]).
- Un automorphisme de type HÉNON possède une infinité de points périodiques hyperboliques.

Le *degré algébrique* d'un automorphisme polynomial

$$f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y)), \quad f_i \in \mathbb{C}[x, y]$$

est défini par  $\deg f = \max(\deg f_1, \deg f_2)$ . Ce degré n'est pas un invariant dynamique (en général si  $f, g$  sont dans  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ , alors  $\deg(fgf^{-1}) \neq \deg g$ ); on introduit donc un second degré, le *degré dynamique* ([Dil96, FM89]), défini par

$$\lambda(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\deg f^n)^{1/n}.$$

On peut vérifier que celui-ci est un invariant dynamique (en fait il existe deux constantes strictement positives  $\alpha$  et  $\beta$  telles que

$$\alpha \deg g^n \leq \deg(fg^n f^{-1}) \leq \beta \deg g^n$$

pour tout entier  $n$ ).

Si  $f$  est un automorphisme élémentaire, on a  $\deg f^n = \deg f$  d'où  $\lambda(f) = 1$ . Au contraire, pour un élément  $f$  de  $\mathcal{H}$ , on a  $\lambda(f) = \deg f$ ; plus précisément si  $f = f_1 \dots f_n$ , avec  $f_i$  application de HÉNON généralisée, on a  $\deg f = \prod_i \deg f_i \geq 2$  (voir [FM89]). Par suite



- $f$  est de type élémentaire si et seulement si  $\lambda(f) = 1$ ;
- $f$  est de type HÉNON si et seulement si  $\lambda(f) > 1$ .

La plupart des propriétés qui précèdent ont été démontrées en s'appuyant sur la structure de produit amalgamé de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ . Plus précisément puisque  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2] = A *_S E$  la théorie de BASS-SERRE assure que  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  agit de manière non triviale par translation à gauche sur un arbre  $\mathcal{T}$  (voir [Ser77]). L'arbre  $\mathcal{T}$  est défini comme suit : l'ensemble des sommets est l'union disjointe des classes à gauche  $(\text{Aut}[\mathbb{C}^2])/A$  et  $(\text{Aut}[\mathbb{C}^2])/E$  et celui des arêtes l'union disjointe des classes à gauche  $(\text{Aut}[\mathbb{C}^2])/S$ . Pour tout automorphisme polynomial  $f$  l'arête  $fS$  relie les sommets  $fA$  et  $fE$ . On hérite ainsi d'une action fidèle de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  dans le groupe des isométries de l'arbre  $\mathcal{T}$ . L'étude de cette action permet de démontrer de nombreuses propriétés sur  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ .

## 2. Groupe des transformations birationnelles

Une *transformation rationnelle* de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  dans lui-même est une transformation de la forme

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (f_0(x, y, z) : f_1(x, y, z) : f_2(x, y, z))$$

où les  $f_i$  sont des polynômes homogènes de même degré sans facteur commun.

Une *transformation birationnelle* du plan projectif complexe dans lui-même est une transformation rationnelle qui admet un inverse rationnel.

**Exemples 1.5.** – Un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , i.e. un élément de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ , est une transformation birationnelle.

- Tout automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^2$  se prolonge en une transformation birationnelle du plan projectif complexe ; par exemple on a dans le cas des automorphismes élémentaires

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (\alpha x z^{n-1} + z^n P\left(\frac{y}{z}\right) : \beta y z^{n-1} + \gamma z^n : z^n)$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des éléments de  $\mathbb{C}$  tels que  $\alpha\beta \neq 0$  et  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[y]$  de degré  $n$ , alors que dans le cas des automorphismes de HÉNON généralisé on a

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (y z^{n-1} : z^n P\left(\frac{y}{z}\right) - \delta x z^{n-1} : z^n),$$

où  $\delta$  désigne un complexe non nul et  $P$  un polynôme de degré supérieur ou égal à 2.

- La transformation

$$\sigma : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy)$$

est rationnelle ; elle s'écrit aussi  $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right)$ . On remarque en particulier que c'est une involution, elle est donc birationnelle.

On désigne par  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  le *groupe des transformations birationnelles du plan projectif dans lui-même* encore appelé *groupe de CREMONA* ; les éléments de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  s'appellent aussi *transformations de CREMONA*.

Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  des automorphismes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est un sous-groupe de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ , de même que  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ .

Une transformation birationnelle

$$f: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (f_0(x, y, z) : f_1(x, y, z) : f_2(x, y, z))$$

a un *ensemble d'indétermination*  $\text{Ind } f$  défini par les zéros communs des  $f_i$ , on dit aussi que ce sont les *points éclatés* par  $f$ . Elle possède aussi un *ensemble exceptionnel*  $\text{Exc } f$  dont les composantes sont les *courbes contractées* par  $f$ ; c'est « l'image » par  $f^{-1}$  de  $\text{Ind } f^{-1}$ . Lorsque  $f$  est birationnelle,  $\text{Exc } f$  est le lieu des zéros de  $\det \text{jac } f$ .

**Exemples 1.6.** – Si  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , alors  $f$  est du type

$$(x : y : z) \mapsto (a_0x + b_0y + c_0z : a_1x + b_1y + c_1z : a_2x + b_2y + c_2z)$$

avec  $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$  et  $\text{Ind } f = \text{Exc } f = \emptyset$ .

– Soit  $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  le prolongement d'un automorphisme élémentaire à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$(x : y : z) \mapsto (\alpha x z^{n-1} + z^n P\left(\frac{y}{z}\right) : \beta y z^{n-1} + \gamma z^n : z^n),$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha\beta \neq 0$ ,  $P \in \mathbb{C}[y]$ ,  $\deg P = n$ , alors

$$\text{Exc } f = \{z = 0\} \quad \text{et} \quad \text{Ind } f = \{(1 : 0 : 0)\}.$$

De même le prolongement d'un automorphisme de HÉNON généralisé à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  contracte une unique droite et éclate un seul point situé sur cette droite.

– Considérons l'involution  $\sigma: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,  $(x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy)$ . On remarque que

$$\text{Ind } \sigma = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}$$

et  $\text{Exc } \sigma = \{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{z = 0\}$ . Plus précisément  $\sigma$  contracte la droite d'équation  $x = 0$  (resp.  $y = 0$ , resp.  $z = 0$ ) sur le point  $(1 : 0 : 0)$  (resp.  $(0 : 1 : 0)$ , resp.  $(0 : 0 : 1)$ ). Puisque  $\sigma$  est une involution  $\sigma$  éclate le point  $(1 : 0 : 0)$  (resp.  $(0 : 1 : 0)$ , resp.  $(0 : 0 : 1)$ ) sur la droite  $x = 0$  (resp.  $y = 0$ , resp.  $z = 0$ ).

L'application d'*éclatement* en un point est un exemple de transformation birationnelle. Soient  $Z$  une surface et  $p$  un point de  $Z$ . Il existe une surface  $\tilde{Z}$  et un morphisme  $\pi: \tilde{Z} \rightarrow Z$  tels que

–  $E = \pi^{-1}(p)$  soit isomorphe à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ;

– la restriction  $\pi|_{\tilde{Z} \setminus E} : \tilde{Z} \setminus E \rightarrow Z \setminus \{p\}$  de  $\pi$  à  $\tilde{Z} \setminus E$  soit un isomorphisme.

À isomorphisme près  $\tilde{Z}$  et  $\pi$  sont uniques. On dit que  $\pi$  est l'application d'éclatement en  $p$  et  $\tilde{Z}$  est l'éclaté de  $Z$  en  $p$ . On dit aussi qu'on passe de  $Z$  à  $\tilde{Z}$  en éclatant le point  $p$  et qu'on passe de  $\tilde{Z}$  à  $Z$  en contractant la courbe  $E$ . La courbe rationnelle  $E$  est appelée *diviseur exceptionnel*.

Une présentation concrète de l'éclatement de  $\mathbb{C}^2$  en 0 est la suivante : on considère

$$\Gamma = \{((x, y), [\xi : \eta]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid x\eta = y\xi\}$$

avec la projection  $\pi$  sur le premier facteur ; le couple  $(\Gamma, \pi)$  est l'éclatement de  $\mathbb{C}^2$  en 0. Notons que  $\pi^{-1} : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \Gamma$  est l'application définie par  $\pi^{-1}(x, y) = ((x, y), [x : y])$  ; on peut aussi écrire

$$\pi^{-1}(x, y) = ((x, y), [1 : y/x]) = ((x, y), [x/y : 1]).$$

Ces deux représentations permettent de définir des cartes  $\mathcal{U}' = \mathbb{C}_{s, \eta}^2$  et  $\mathcal{U}'' = \mathbb{C}_{\xi, t}^2$  où les coordonnées sont définies à l'aide de  $\pi$

$$\pi' : (s, \eta) \mapsto (s, s\eta) = (x, y), \quad \pi'' : (\xi, t) \mapsto (\xi t, t) = (x, y).$$

Par suite  $\Gamma = \mathcal{U}' \cup \mathcal{U}''$  et  $E' = E \cap \mathcal{U}' = \{s = 0\}$  est équivalent à  $\mathbb{C}$ . Dans l'éclaté la transformée stricte (voir Chapitre 2) de  $\{x = 0\}$  (resp.  $\{y = 0\}$ ) dans  $\Gamma$  est donnée par  $\{\xi = 0\}$  (resp.  $\{\eta = 0\}$ ) ; il s'en suit qu'on utilise le système de coordonnées  $(\xi, t)$  (resp.  $(s, \eta)$ ) si on veut travailler au voisinage de  $\{x = 0\}$  (resp.  $\{y = 0\}$ ).

Il existe un théorème de génération pour  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ .

**Théorème 1.7 ([Cas01, Noe69, Noe70, Noe72]).** *Le groupe de CREMONA est engendré par  $\sigma$  et  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ .*

On peut reformuler cet énoncé d'une autre façon ; avant remarquons que les transformations birationnelles d'une surface  $Z$  dans elle-même forment un groupe que l'on note  $\text{Bir}(Z)$ .

**Théorème 1.8 ([Isk85]).** *Considérons le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$  des transformations birationnelles de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  dans lui-même,  $\pi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  la projection sur le premier facteur et  $\tau : (u, v) \mapsto (v, u)$ . Le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$  est engendré par  $\tau$  et le groupe des transformations qui préservent la fibration  $\pi$ .*

Contrairement à  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  n'est pas le produit amalgamé de deux groupes le long de leur intersection ([Wri92]). Les techniques utilisées pour décrire ces deux groupes sont donc essentiellement différentes.

Il y a une notion de premier degré dynamique sur  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  qui prolonge la notion définie sur  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ . Si  $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,  $(x : y : z) \mapsto (f_0(x, y, z) : f_1(x, y, z) : f_2(x, y, z))$  désigne une transformation birationnelle, le *degré algébrique* de  $f$  est par définition égal au degré des  $f_i$ . Quant au *degré dynamique* il est donné par la même définition, à savoir par

$$\lambda(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\deg f^n)^{1/n}.$$

Soit  $f$  dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ; la transformation  $f$  est dite *algébriquement stable* s'il n'existe pas de courbe  $C$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  telle que  $f^k(C)$  appartienne à  $\text{Ind } f$  pour un certain entier  $k \geq 0$ . Autrement dit une transformation est algébriquement stable si la situation suivante n'arrive pas

$$\left( \begin{array}{ccccccc} & f & & f & & f & \dots & \longrightarrow & & f & & f \\ & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} C$$

Les deux conditions qui suivent sont équivalentes ([DF01])

- il n'existe pas de courbe  $C$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  telle que  $f^k(C)$  appartienne à  $\text{Ind } f$  pour un certain entier  $k \geq 0$ ;
- pour tout entier  $n$  on a  $\deg f^n = (\deg f)^n$ .

**Exemples 1.9.** – Un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est algébriquement stable.

- L'involution  $\sigma: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,  $(x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy)$  n'est pas algébriquement stable : si  $C$  appartient à  $\text{Exc } \sigma$  alors  $\sigma(C)$  est un point de  $\text{Ind } \sigma$ ; par ailleurs  $\deg \sigma^2 = 1$  alors que  $(\deg \sigma)^2 = 4$ .
- Si  $A$  est un élément « générique » de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ , alors  $A\sigma$  est algébriquement stable ([CD]).

D'après DILLER et FAVRE toute transformation birationnelle sur une surface complexe compacte est algébriquement stable modulo conjugaison birationnelle.

**Proposition 1.10** ([DF01]). *Soit  $f: Z \dashrightarrow Z$  une transformation birationnelle sur une surface complexe compacte  $Z$ . Il existe une suite d'éclatements  $\pi: X \rightarrow Z$  telle que  $\pi^{-1}f\pi$  soit algébriquement stable.*

*Idée de démonstration.* Raisonnons par l'absurde, i.e. supposons que  $f$  ne soit pas algébriquement stable ; il existe alors une courbe  $C$  et un entier  $k$  tels que

$$\left( \begin{array}{ccccccc} & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow \\ & & p_1 & & p_2 & & & & p_{k-1} & & p_k & \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} C$$

L'idée mise en œuvre par DILLER et FAVRE est la suivante : quitte à éclater les  $p_i$  l'image de  $C$  est, pour  $i = 1, \dots, k$ , une courbe. En renouvelant un nombre fini de fois cette opération on obtient le résultat annoncé.  $\square$

Lorsque  $f$  est une transformation de CREMONA algébriquement stable, on a  $\lambda(f) = \deg f$ .

Nous allons voir que pour  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  il n'y a pas d'analogue à la dichotomie automorphisme de HÉNON/automorphisme élémentaire. Pour ce faire introduisons la famille de transformations birationnelles  $(f_{\alpha,\beta})$  donnée par

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto ((\alpha x + y)z : \beta y(x + z) : z(x + z)), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$$

soit dans la carte affine  $z = 1$

$$f_{\alpha,\beta}(x, y) = \left( \frac{\alpha x + y}{x + 1}, \beta y \right).$$

**Théorème 1.11 ([Dés08]).** *Le premier degré dynamique de  $f_{\alpha,\beta}$  vaut 1; plus précisément  $\deg f_{\alpha,\beta}^n \sim n$ .*

*Supposons que  $\alpha$  et  $\beta$  soient de module 1 et génériques. Si  $g$  commute à  $f_{\alpha,\beta}$ , alors  $g$  est une puissance de  $f_{\alpha,\beta}$ ; en particulier, le centralisateur de  $f_{\alpha,\beta}$  est dénombrable.*

*Les éléments  $f_{\alpha,\beta}^2$  possèdent deux points fixes  $m_1, m_2$  et*

- *il existe un voisinage  $\mathcal{V}_1$  de  $m_1$  sur lequel  $f_{\alpha,\beta}$  est conjugué à  $(\alpha x, \beta y)$ ; en particulier l'adhérence de l'orbite d'un point de  $\mathcal{V}_1$  sous l'action de  $f_{\alpha,\beta}$  est un tore de dimension 2;*
- *il existe un voisinage  $\mathcal{V}_2$  de  $m_2$  tel que la dynamique de  $f_{\alpha,\beta}^2$  soit localement linéaire sur  $\mathcal{V}_2$ ; l'adhérence de l'orbite générique d'un point de  $\mathcal{V}_2$  sous l'action de  $f_{\alpha,\beta}^2$  est un cercle.*

Supposons que  $|\beta| = 1$ ; dans la carte affine  $(x, y)$  les  $f_{\alpha,\beta}$  laissent les 3-variétés  $|y| = \text{cte}$  invariantes. Les orbites présentées sont bornées dans un  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ . La dynamique se passe essentiellement en dimension 3, différentes projections permettent d'avoir une bonne représentation de l'orbite d'un point. Dans la carte affine  $z = 1$  on désigne par  $p_1$  et  $p_2$  les deux projections standards. Les figures que nous proposons sont des représentations (en perspective) des projections suivantes.

- On considère d'abord l'ensemble

$$\Omega_1(m, \alpha, \beta) = \{(p_1(f_{\alpha,\beta}^n(m)), \text{Im}(p_2(f_{\alpha,\beta}^n(m)))) \mid n = 1..30000\};$$

cet ensemble est contenu dans le produit de  $\mathbb{R}^2$  par un intervalle. L'orbite d'un point sous l'action de  $f_{\alpha,\beta}$  est comprimée par le revêtement double  $(x, \rho e^{i\theta}) \rightarrow (x, \rho \sin \theta)$ .

- De même on introduit

$$\Omega_2(m, \alpha, \beta) = \{(\text{Re}(p_1(f_{\alpha,\beta}^n(m))), p_2(f_{\alpha,\beta}^n(m))) \mid n = 1..30000\}$$

qui est inclus dans un cylindre  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ ; cette seconde projection montre comment « décompresser »  $\Omega_1$  pour avoir l'allure de l'orbite.

On suppose que  $\alpha = \exp(2i\sqrt{3})$  et  $\beta = \exp(2i\sqrt{2})$  et on note  $\Omega_i(m)$  au lieu de  $\Omega_i(m, \alpha, \beta)$ . Les figures qui suivent illustrent très bien le Théorème 1.11.


 $\Omega_1(10^{-4}i, 10^{-4}i)$ 

 $\Omega_2(10^{-4}i, 10^{-4}i)$ 

Il s'agit de l'orbite d'un point situé dans la zone de linéarisation du point  $(0 : 0 : 1)$ ; on observe que l'adhérence d'une orbite est un tore.

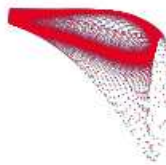

 $\Omega_1(10000 + 10^{-4}i, 10000 + 10^{-4}i)$ 

 $\Omega_2(10000 + 10^{-4}i, 10000 + 10^{-4}i)$ 

C'est « l'orbite » sous l'action de  $f_{\alpha, \beta}^2$  d'un point dans la zone de linéarisation du point  $(0 : 1 : 0)$ ; ici l'adhérence d'une « orbite » est un cercle topologique. Les singularités sont des artéfacts de projection.

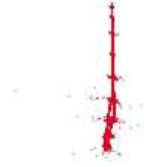
**Remarque 1.12.** La droite  $z = 0$  est contractée par  $f_{\alpha, \beta}$  sur  $(0 : 1 : 0)$  lui-même éclaté sur  $z = 0$  : la transformation  $f_{\alpha, \beta}$  n'est pas algébriquement stable ; c'est pour cette raison que l'on a considéré  $f_{\alpha, \beta}^2$  et non  $f_{\alpha, \beta}$ .

La théorie ne permet pas de prévoir ce qui se passe à l'extérieur de ces deux zones de linéarisation. Entre les deux zones de linéarisation  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  les expériences suggèrent une dynamique chaotique comme le montrent les dessins qui suivent.

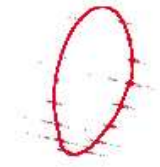

 $\Omega_1(0.4 + 10^{-4}i, 0.4 + 10^{-4}i)$ 

 $\Omega_2(0.4 + 10^{-4}i, 0.4 + 10^{-4}i)$

On constate une déformation des tores invariants.



$$\Omega_1(0.9 + 10^{-4}i, 0.9 + 10^{-4}i)$$



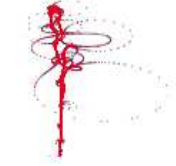
$$\Omega_2(0.9 + 10^{-4}i, 0.9 + 10^{-4}i)$$



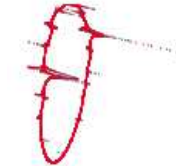
$$\Omega_1(1 + 10^{-4}i, 1 + 10^{-4}i)$$



$$\Omega_2(1 + 10^{-4}i, 1 + 10^{-4}i)$$



$$\Omega_1(1.08 + 10^{-4}i, 1.08 + 10^{-4}i)$$



$$\Omega_2(1.08 + 10^{-4}i, 1.08 + 10^{-4}i)$$

Manifestement les tores invariants ont disparu. Toutefois la figure semble s'organiser autour d'une courbe fermée.

Si, contrairement au cadre des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$ , on n'a pas d'équivalence entre premier degré dynamique strictement supérieur à 1 et centralisateur non dénombrable on a néanmoins une implication. Plus précisément on a l'énoncé suivant.

**Théorème 1.13 ([Can]).** *Soit  $f$  une transformation birationnelle du plan projectif complexe dont le premier degré dynamique  $\lambda(f)$  est strictement plus grand que 1. Si  $g$  est un élément de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  qui commute avec  $f$ , il existe deux entiers  $m$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $n$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que  $g^m = f^n$ .*

Étant donnée une transformation birationnelle  $f$ , DILLER et FAVRE ont étudié le comportement de  $(\deg f^n)_n$  et donné des propriétés dans chacun des cas possibles.

**Théorème 1.14 ([DF01]).** *Une transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  satisfait, à conjugaison birationnelle près, une et une seule des propriétés suivantes.*

- La suite  $(\deg f^n)_n$  est bornée,  $f$  est un automorphisme d’une surface rationnelle  $Z$  et un itéré de  $f$  appartient à  $\text{Aut}^0(Z)$ , la composante neutre de  $\text{Aut}(Z)$ .
- $\deg f^n \sim n$  alors  $f$  n’est pas un automorphisme et  $f$  préserve une unique fibration qui est rationnelle.
- $\deg f^n \sim n^2$  auquel cas  $f$  est un automorphisme préservant une unique fibration qui est elliptique.
- $\deg f^n \sim \alpha^n$ ,  $\alpha > 1$ .

Dans les trois premières éventualité on a  $\lambda(f) = 1$ , dans le dernière  $\alpha = \lambda(f) > 1$ .

**Exemples 1.15.** – Si  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , alors  $\deg f^n = 1$  pour tout  $n$ . Toute transformation birationnelle  $f$  d’ordre fini satisfait :  $(\deg f^n)_n$  est bornée.

- La transformation  $f = (xz : xy : z^2)$  vérifie  $\deg f^n \sim n$  (se placer dans la carte  $z = 1$ ).
- Le prolongement  $f$  d’un automorphisme de HÉNON généralisé  $(y, P(y) - \delta x)$ , avec  $P$  dans  $\mathbb{C}[y]$  tel que  $\deg P \geq 2$  et  $\delta$  dans  $\mathbb{C}^*$ , a une croissance des degrés exponentielle, i.e.  $\deg f^n = (\deg P)^n$ .
- Soit  $f_M$  l’élément de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  défini dans la carte  $z = 1$  par

$$f_M = (x^a y^b, x^c y^d) \quad \text{avec} \quad M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

On a l’alternative

- ou bien  $|\text{tr} M| \leq 2$  et  $\lambda(f_M) = 1$ ;
- ou bien  $M$  a pour valeurs propres réelles  $\lambda$  et  $\lambda^{-1}$  avec  $\lambda^{-1} < 1 < \lambda$  et  $\lambda(f_M) = \lambda$ .

Par suite  $(\deg f_M^n)_n$  est bornée (resp.  $\deg f_M^n \sim n$ , resp.  $\deg f_M^n \sim n^2$ , resp.  $\deg f_M^n \sim \lambda(f_M)^n$ ) si et seulement si  $M$  est elliptique (resp. parabolique, resp. parabolique, resp. hyperbolique).

Une variété kählérienne  $M$  est une variété hermitienne  $M$  (i.e. une variété complexe munie d’une métrique hermitienne  $h$ ) telle que la 2-forme  $\omega = -\text{im } h$  soit fermée.

**Exemples 1.16.** – Puisque toute sous-variété d’une variété kählérienne est kählérienne et que la métrique de Fubini-Study sur  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  est kählérienne toute variété algébrique projective est kählérienne.

- Soit  $\Lambda$  un réseau dans  $\mathbb{C}^n$ ; le tore  $\mathbb{C}^n/\Lambda$  est une variété kählérienne.
- Toute surface de Riemann est kählérienne.



Les notions de premier degré dynamique, de stabilité algébrique et le Théorème 1.14 se généralisent au contexte suivant : les transformations biméromorphes sur des surfaces compactes kählériennes. Une transformation rationnelle  $f$  sur une surface complexe compacte kählérienne  $Z$  définit un opérateur linéaire  $f^*$  sur les groupes de cohomologie de  $Z$  préservant la décomposition de HODGE  $H^k(Z, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=k} H^{i,j}(Z, \mathbb{C})$ . On définit le *premier degré*

*dynamique* de  $f$  par

$$\lambda(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(f^n)^*\|^{1/n}$$

où  $\|\cdot\|$  désigne une norme sur  $\text{End}(H^{1,1}(Z, \mathbb{R}))$ ; toujours d'après [DF01] cette quantité est un invariant birationnel. Elle coïncide sur le plan projectif complexe avec la notion déjà introduite.



## CHAPITRE 2

### Un peu de géométrie algébrique

#### 1. Quelques définitions et propriétés

Soient  $X$  et  $Z$  deux surfaces complexes compactes. Une application méromorphe  $f: X \dashrightarrow Z$  est définie par son graphe  $\Gamma(f) \subset X \times Z$ ; ce graphe est une sous-variété irréductible pour laquelle la projection  $\pi_1: \Gamma(f) \rightarrow X$  sur le premier facteur est une *modification propre*, i.e. une application holomorphe surjective propre dont la fibre générique est un point ([Fis76]). Le lieu d'indétermination de  $f$  est l'ensemble fini de points où  $\pi_1$  n'admet pas d'inverse local. L'application  $f$  est *dominante* si la seconde projection  $\pi_2: \Gamma(f) \rightarrow Z$  est surjective. L'ensemble critique de  $f$  est l'image par  $\pi_1$  du lieu critique de  $\pi_2$ ; on le notera  $C(f)$ . Notons  $\text{Exc } \pi_2$  l'ensemble des points où  $\pi_2$  n'est pas une application finie; on définit l'ensemble exceptionnel de  $f$  par  $\text{Exc } f = \pi_1(\text{Exc } \pi_2) \subset C(f)$ . Soient  $f: X \dashrightarrow \mathcal{Y}$ ,  $g: \mathcal{Y} \dashrightarrow Z$  deux applications méromorphes dominantes; le graphe  $\Gamma(g \circ f)$  de  $g \circ f$  est l'adhérence de

$$\{(x, g(f(x))) \in X \times Z \mid x \notin \text{Ind } f, f(x) \notin \text{Ind } g\};$$

ce sous-ensemble coïncide avec

$$\Gamma(g) \circ \Gamma(f) = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in \mathcal{Y}, (x, y) \in \Gamma(f), (y, z) \in \Gamma(g)\}$$

si et seulement si ce dernier est irréductible.

**Proposition 2.1 ([DF01]).** *Soient  $f: X \dashrightarrow \mathcal{Y}$ ,  $g: \mathcal{Y} \dashrightarrow Z$  deux applications méromorphes dominantes entre deux surfaces complexes compactes;  $\Gamma(g) \circ \Gamma(f)$  est irréductible si et seulement s'il n'existe pas de composante  $\mathcal{V}$  dans  $\text{Exc } f$  telle que  $f(\mathcal{V})$  appartienne à  $\text{Ind } g$ .*

La transformation  $f$  est *algébriquement stable* si et seulement si  $\Gamma(f) \circ \Gamma(f^n) = \Gamma(f \circ f^n)$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

Soit  $f: X \dashrightarrow Z$  une application méromorphe dominante entre deux surfaces complexes compactes,  $\Gamma$  une désingularisation de son graphe et  $\pi_1, \pi_2$  les deux projections naturelles. Une forme lisse  $\alpha \in C_{p,q}^\infty(Z)$  de bidegré  $(p, q)$  peut être tirée en arrière comme une forme lisse  $\pi_2^* \alpha \in C_{p,q}^\infty(\Gamma)$  et poussée en avant comme un courant. Si  $\{\alpha\} \in H^{p,q}(Z)$  est la classe de Dolbeault d'une forme lisse  $\alpha$  on définit  $f^* \{\alpha\}$  par  $f^* \{\alpha\} := \{\pi_{1*} \pi_2^* \alpha\} \in H^{p,q}(X)$  d'où

l'application linéaire  $f^* : H^{p,q}(Z) \rightarrow H^{p,q}(X)$ . De la même façon on peut définir

$$f_* = \pi_{2*} \pi_1^* : H^{p,q}(X) \rightarrow H^{p,q}(Z).$$

Soient  $Z$  une surface et  $\pi : \tilde{Z} \rightarrow Z$  l'application d'éclatement d'un point  $p$  de  $Z$ . Si  $C$  est une courbe de  $Z$  passant par  $p$  on désigne par  $\tilde{C} = \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{p\})}$  la *transformée stricte* de  $C$ ; la *transformée totale* de  $C$  est le diviseur  $\pi^* C$ . Remarquons que si  $C$  est lisse en  $p$  on a

$$\pi^* C = \tilde{C} + E.$$

Un *diviseur*  $E$  sur  $Z$  est une combinaison linéaire du type  $\sum c_i C_i$ , les  $C_i$  désignant des courbes irréductibles éventuellement singulières de  $Z$  et les  $c_i$  des entiers relatifs. Les diviseurs  $D'$  et  $D''$  sont *linéairement équivalents*,  $D' \sim D''$ , si  $D' - D''$  est le diviseur d'une fonction rationnelle  $R$ , autrement dit si  $D' - D''$  coïncide avec le lieu des zéros (avec multiplicité) de  $R$  privé de l'ensemble des pôles de  $R$ .

Le *groupe de PICARD* de  $Z$ , noté  $\text{Pic}(Z)$ , est le groupe quotient des diviseurs modulo équivalence linéaire. On a :  $\text{Pic}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}$ . Soient  $H$  la classe d'une droite dans  $\text{Pic}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  et  $C$  la classe d'une courbe de degré  $d$ ; on constate que  $C \sim dH$ .

La surface  $Z$  est munie d'une forme d'intersection : si  $D$  et  $D'$  sont deux courbes distinctes,  $D \cdot D'$  correspond au nombre de points d'intersection de ces courbes comptés avec multiplicité ; on remarque que dans ce cas  $D \cdot D'$  est positif ou nul. On peut étendre naturellement cette définition pour donner un sens à l'intersection de deux diviseurs quelconques ; un cas particulier est l'auto-intersection, on désigne alors  $D \cdot D$  par  $D^2$ . Le nombre d'intersection vérifie les propriétés suivantes

- si  $D' \sim D''$  alors  $D \cdot D' = D \cdot D''$ ;
- $\pi^* D \cdot \pi^* D' = D \cdot D'$ ;
- $E \cdot \pi^* D = 0$ ;
- $E^2 = -1$ ;
- $\tilde{C}^2 = C^2 - 1$ .

Soient  $\pi : \text{Bl}_p \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  l'éclatement de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  au point  $p$  et  $E = \pi^{-1}(p)$  la fibre exceptionnelle. Notons  $\text{Rat}(S)$  l'ensemble des fonctions rationnelles sur  $S$ ; on a :

$$\text{Rat}(\text{Bl}_p \mathbb{P}^2) = \pi^*(\text{Rat}(\mathbb{P}^2)).$$

Le groupe  $\text{Pic}(\text{Bl}_p \mathbb{P}^2)$  est engendré par  $E$  et  $\tilde{L}$  où  $L = \{\ell = 0\}$  désigne une droite ne passant pas par  $p$  et  $\tilde{L} = \pi^* L = \{\ell \circ \pi = 0\}$  le pull-back de  $L$ .

Plus généralement soient  $Z$  une variété complexe obtenue en éclatant le plan projectif complexe en  $N$  points distincts  $p_1, \dots, p_N$  et  $\pi$  la composition de ces différents éclatements. Posons  $H_Z = \pi^* H$ ,  $H$  désignant une droite. Si  $H$  ne contient aucun des  $p_i$ , alors  $H_Z$  est représenté par la transformée stricte  $\tilde{H}$  de  $H$ . Notons  $E_j = \pi^{-1}(p_j)$  la classe dans  $\text{Pic}(Z)$  de

la fibre exceptionnelle obtenue en éclatant  $p_i$ . En général si  $H$  est une droite de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , alors  $H_Z = \tilde{H} + \sum_{j|p_j \in H} E_j$ . Dans ce cas on peut décrire  $\text{Pic}(Z)$ .

**Théorème 2.2.** Soient  $p_1, \dots, p_N$  des points distincts de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Notons  $\pi: Z \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  la suite d'éclatements des  $p_i$ . Si  $E_j = \pi^{-1}(p_j)$  désignent les fibres exceptionnelles et  $H$  une droite générique de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , alors

$$\text{Pic}(Z) = \mathbb{Z}E_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}E_N \oplus \mathbb{Z}\pi^*H.$$

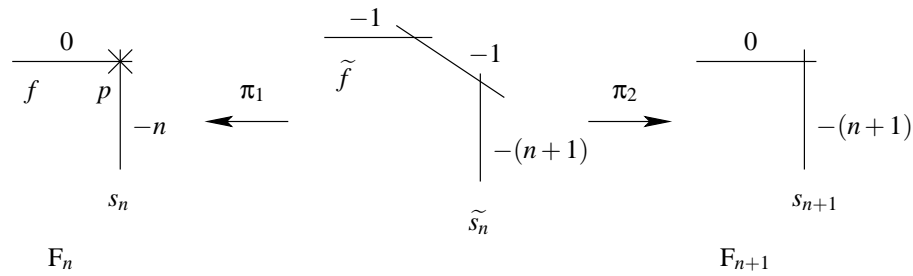
Rappelons ce que sont les *surfaces de HIRZEBRUCH*  $F_n$ . Posons  $F_0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . La surface  $F_1$  est obtenue en éclatant le plan projectif complexe en  $(1 : 0 : 0)$ ; cette surface est un compactifié de  $\mathbb{C}^2$  naturellement muni d'une fibration rationnelle correspondant aux droites  $y = \text{cte}$ . Le diviseur à l'infini est constitué de deux courbes rationnelles s'intersectant transversalement en un point. On a

- la transformée stricte de la droite à l'infini dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  qui est une droite ;
- le diviseur exceptionnel de l'éclatement qui est une section pour la fibration.

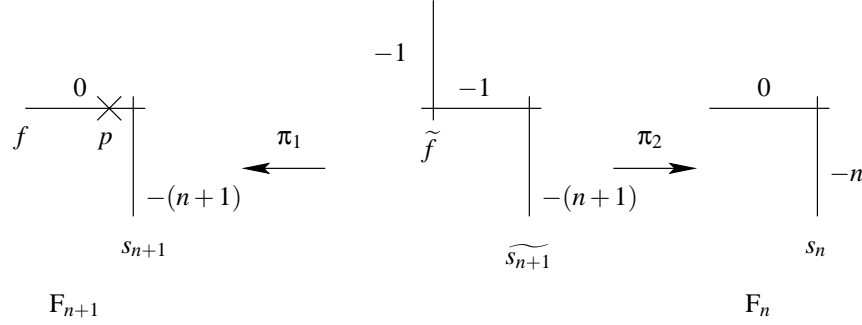
Plus généralement  $F_n$  est, pour tout  $n \geq 1$ , un compactifié de  $\mathbb{C}^2$  muni d'une fibration rationnelle telle que le diviseur à l'infini soit constitué de deux courbes rationnelles transverses, une fibre  $f$  et une section  $s_n$  d'auto-intersection  $-n$

$$F_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(O_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(1) \oplus O_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(n)), \quad n \geq 2.$$

Considérons la surface  $F_n$ . On note  $p$  l'intersection de  $s_n$  et  $f$  une fibre,  $\pi_1$  l'éclatement de  $F_n$  en  $p$  et  $\pi_2$  la contraction de la transformée stricte  $\tilde{f}$  de  $f$ . On passe de  $F_n$  à  $F_{n+1}$  via  $\pi_2\pi_1^{-1}$



On peut aussi passer de  $F_{n+1}$  à  $F_n$  via  $\pi_2\pi_1^{-1}$  où  $\pi_1$  est l'éclatement de  $F_{n+1}$  en un point  $p$  de la fibre  $f$  qui n'appartient pas à  $s_{n+1}$  et  $\pi_2$  la contraction de la transformée stricte  $\tilde{f}$  de  $f$



Dans ces deux éventualités on dit que  $\pi_2 \pi_1^{-1}$  est une *transformation élémentaire* en  $p$ .

## 2. Théorème de factorisation de ZARISKI

Le théorème de factorisation de ZARISKI assure que toute transformation de CREMONA s'écrit au moyen d'éclatements ; ce résultat est en fait valable pour toute transformation birationnelle d'une surface projective lisse dans une autre. Avant de l'énoncer rappelons que si  $X$  est une variété irréductible et  $Y$  une variété, une *transformation rationnelle*  $f: X \dashrightarrow Y$  est un morphisme d'un ouvert  $U$  de  $X$  dans  $Y$  qui n'est pas la restriction d'un morphisme  $\tilde{U} \rightarrow Y$  avec  $U \subsetneq \tilde{U}$ .

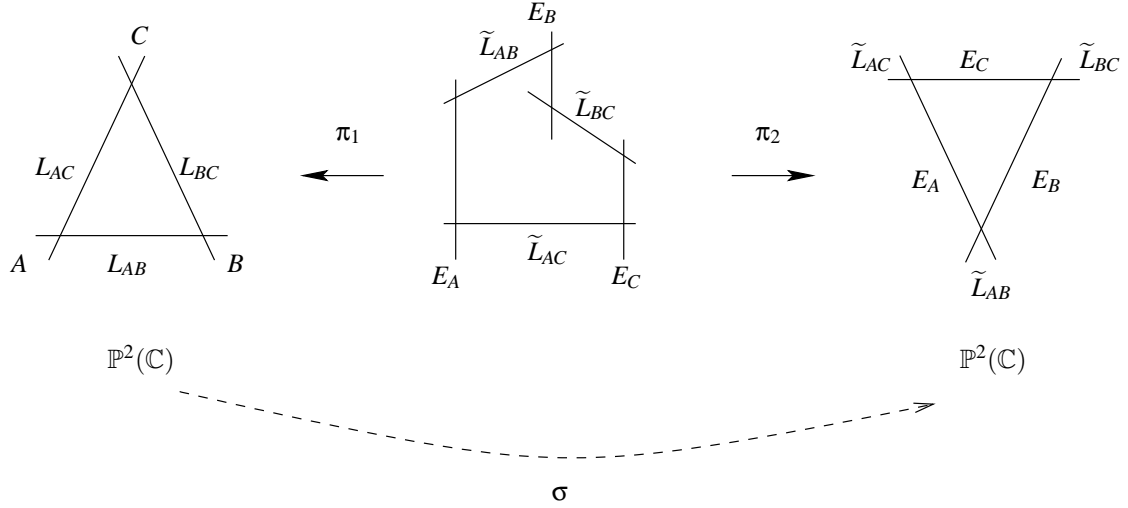
**Théorème 2.3** (ZARISKI, 1944). *Soient  $X, Y$  deux surfaces projectives lisses et  $f$  une transformation birationnelle entre  $X$  et  $Y$ . Il existe une surface projective lisse  $Z$  et deux suites d'éclatements*

$$\pi_1: Z \rightarrow X, \quad \pi_2: Z \rightarrow Y$$

telles que  $f = \pi_2 \pi_1^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ X & \dashrightarrow \quad f \quad \dashrightarrow & Y \end{array}$$

**Exemple 2.4.** L'involution  $\sigma$  se décompose en deux suites d'éclatements



avec

$$A = (1 : 0 : 0), \quad B = (0 : 1 : 0), \quad C = (0 : 0 : 1),$$

$E_A$  (resp.  $E_B$ , resp.  $E_C$ ) le diviseur exceptionnel obtenu en éclatant  $A$  (resp.  $B$ , resp.  $C$ ) et  $\tilde{L}_{AB}$  (resp.  $\tilde{L}_{AC}$ , resp.  $\tilde{L}_{BC}$ ) la transformée stricte de  $L_{AB}$  (resp.  $L_{AC}$ , resp.  $L_{BC}$ ).

On trouve une démonstration du Théorème 2.3 dans [Bea78] ; elle se décompose en deux étapes :

- tout d’abord on montre qu’une transformation rationnelle d’une surface dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  s’écrit  $\phi\pi^{-1}$  où  $\pi$  désigne une suite d’éclatements et  $\phi$  un morphisme ;
- puis on établit qu’un morphisme entre deux surfaces est la composée d’un isomorphisme et d’une suite d’éclatements.

Avant tout rappelons que le diviseur exceptionnel  $E$  obtenu en éclatant un point  $m$  d’une surface  $Z$  est appelé *premier voisinage infinitésimal* de  $m$  et les points de  $E$  sont dits *infinitement proches* de  $m$ . Le  $k$ -ième *voisinage infinitésimal* de  $m$  est l’ensemble des points contenus dans le premier voisinage d’un certain point du  $(k-1)$ -ième voisinage infinitésimal de  $m$ .

Si  $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,  $(x : y : z) \mapsto (f_0(x, y, z) : f_1(x, y, z) : f_2(x, y, z))$  désigne une transformation birationnelle, le *réseau homaloïdal* associé à  $f$  est le système de courbes  $\mathcal{H}_f$  défini par

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0, \quad (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C});$$

c’est l’image réciproque par  $f$  du réseau de droites  $\alpha_0 x + \alpha_1 y + \alpha_2 z = 0$ . Chaque courbe du réseau  $\mathcal{H}_f$  est donc rationnelle. Les points base de  $\mathcal{H}_f$  sont les points par lesquels passent toutes les courbes du réseau ; on les appelle aussi *points base* de  $f$ . Ils peuvent

### 3. Matrices caractéristiques

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \pi \swarrow & & \searrow \eta \\ \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) & \overset{f}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \end{array}$$
$$\pi: Z = Z_k \xrightarrow{\pi_k} Z_{k-1} \xrightarrow{\pi_{k-1}} \dots \xrightarrow{\pi_2} Z_1 \xrightarrow{\pi_1} Z_0 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$
$$\eta: Z = x_k \xrightarrow{\eta_k} x_{k-1} \xrightarrow{\eta_{k-1}} \dots \xrightarrow{\eta_2} x_1 \xrightarrow{\eta_1} x_0 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}).$$

- $\mathcal{B} = \{e_0 = \pi^*H, e_1 = E_1, \dots, e_k = E_k\}$ ;
- $\mathcal{B}' = \{e'_0 = \eta^*H, e'_1 = E'_1, \dots, e'_k = E'_k\}$ .

$$e'_0 = v e_0 - \sum_{i=1}^k m_i e_i, \quad e'_j = v_j e_0 - \sum_{i=1}^k m_{ij} e_i, \quad j \geq 1.$$
$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_k \\ -m_1 & -m_{11} & \dots & -m_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -m_k & -m_{k1} & \dots & -m_{kk} \end{bmatrix}$$

est appelée *matrice caractéristique* de  $f$ . La première colonne de la matrice  $M$  est le vecteur  $(v, -m_1, \dots, -m_k)$ , vecteur caractéristique de  $f$ . Les autres colonnes  $(v_i, -m_{1i}, \dots, -m_{ki})$



décrivent le « comportement de  $E'_i$  » : si  $v_j > 0$ , alors  $\pi(E'_j)$  est une courbe dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $v_j$  passant par les points base  $x_\ell$  de  $f$  avec multiplicité  $m_{\ell j}$ .

Notons que si  $\mathcal{Z}$  domine  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  on peut identifier  $H^2(\mathcal{Z}, \mathbb{Z})$  et  $\text{Pic}(\mathcal{Z})$  ce que nous ferons par la suite.

#### 4. Dimension de KODAIRA

Soit  $\mathcal{M}$  une variété complexe compacte. Si  $L$  est un fibré en droites holomorphe sur  $\mathcal{M}$ , on désigne par  $H^0(\mathcal{M}, L)$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel constitué des sections holomorphes globales de  $L$ . La dimension de  $H^0(\mathcal{M}, L)$  est finie. Soient  $x$  un point de  $\mathcal{M}$  et  $L_x$  la fibre de  $L$  en ce point ; l'évaluation des sections de  $L$  au point  $x$  détermine une application linéaire  $\Theta_{L_x} : H^0(\mathcal{M}, L) \rightarrow L_x$ . Lorsque toutes les sections globales de  $L$  s'annulent en  $x$ , l'application  $\Theta_{L_x}$  est identiquement nulle et  $x$  est un point base de  $L$ . Étant donné un isomorphisme de  $L_x$  avec  $\mathbb{C}$ , l'application  $\Theta_{L_x}$  s'interprète comme une forme linéaire ; elle ne dépend du choix de l'isomorphisme que par un facteur multiplicatif. Ainsi pour tout point  $x$  de  $\mathcal{M}$  qui n'est pas un point base de  $L$  on obtient un élément  $[\Theta_{L_x}]$  de  $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{M}, L)^*)$ . Pour les fibrés en droites possédant au moins une section non nulle on a une application méromorphe

$$\Theta_L : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathcal{M}, L)^*)$$

telle que  $\text{Ind } \Theta_L$  soit contenu dans l'ensemble des points base de  $L$ . On peut répéter cette construction en remplaçant  $L$  par  $L^{\otimes \ell}$  où  $\ell$  désigne un entier. On définit la *dimension de KODAIRA-IITAKA* de  $L$  par

$$\text{kod}(\mathcal{M}, L) = \max_{\ell > 0} \dim_{\mathbb{C}}(\Theta_{L^{\otimes \ell}}(\mathcal{M}))$$

avec la convention suivante : si aucune puissance strictement positive de  $L$  ne possède de section non nulle, on pose  $\text{kod}(\mathcal{M}, L) = -\infty$ . La *dimension de KODAIRA* de  $\mathcal{M}$ , notée  $\text{kod } \mathcal{M}$ , est la dimension de KODAIRA-IITAKA du fibré canonique  $K_{\mathcal{M}} = \det(T^* \mathcal{M})$  de  $\mathcal{M}$ .

Soit  $\mathcal{Z}$  une surface complexe compacte kählérienne ;  $\text{kod } \mathcal{Z}$  appartient à  $\{-\infty, 0, 1, 2\}$ . Lorsque la dimension de KODAIRA de  $\mathcal{Z}$  est positive ou nulle, le modèle minimal  $\mathcal{Z}'$  de  $\mathcal{Z}$ , *i.e.* la surface obtenue en contractant les éventuelles courbes d'auto-intersection  $-1$  sur  $\mathcal{Z}$ , est unique ; de plus, les groupes  $\text{Bir}(\mathcal{Z}')$ ,  $\text{Bir}(\mathcal{Z})$  et  $\text{Aut}(\mathcal{Z})$  coïncident ([BHPVdV04]). Avant de caractériser de telles surfaces  $\mathcal{Z}$  rappelons quelques définitions.

Une *surface K3* est une surface  $\mathcal{Z}$  complexe, compacte, simplement connexe, à fibré canonique trivial. En particulier il existe une 2-forme holomorphe  $\omega$  sur  $\mathcal{Z}$  qui ne s'annule pas ;  $\omega$  est unique à multiplication près par un scalaire.

**Exemples 2.5.** – Toute surface quartique lisse dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  est une surface K3.

- Tout revêtement double de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ramifié le long d'une courbe sextique lisse est une surface K3.

Soit  $Z$  une surface K3 munie d'une involution holomorphe  $\iota$ . Lorsque  $\iota$  est sans point fixe, le quotient est ce qu'on appelle une *surface de ENRIQUES* ; sinon il s'agit d'une surface rationnelle.

Une *surface minimale* est une surface ne contenant aucune courbe rationnelle lisse d'auto-intersection  $-1$ . Les surfaces rationnelles minimales sont  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  et  $F_n$ ,  $n \geq 2$  (voir [Bea78]).

Nous pouvons maintenant passer à la description des surfaces complexes compactes kählériennes.

- Lorsque  $\text{kod } Z = -\infty$  il y a deux familles : la première constituée des surfaces birationnelles à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  (par exemple  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , les surfaces de HIRZEBRUCH) ; la seconde formée des surfaces réglées non rationnelles (par exemple les fibrés en  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  au dessus d'une courbe de genre  $g \geq 1$ ).
- Lorsque  $\text{kod } Z = 0$  il y a aussi deux familles : celle constituée des tores  $\mathbb{C}^2/\Gamma$  et des surfaces hyperelliptiques (surfaces revêtues par des tores à l'aide d'un morphisme étale) ; et enfin celle formée des surfaces K3 et surfaces de ENRIQUES.
- Lorsque  $\text{kod } Z = 1$ , alors  $Z$  est une surface elliptique.
- Lorsque  $\text{kod } Z = 2$ , alors  $Z$  est une surface de type général (exemple : toute hypersurface lisse de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  de degré supérieur ou égal à 5).

## CHAPITRE 3

### Un peu de dynamique

#### 1. Linéarisation

Commençons par quelques rappels de linéarisation en dimension 1. Soit

$$f(z) = \alpha z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad \alpha = e^{2i\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

On cherche  $h(z) = z + b_2 z^2 + \dots$  tel que  $fh(z) = h(\alpha z)$ . Formellement

$$b_2 = \frac{a_2}{\alpha^2 - \alpha}, \dots, b_n = \frac{a_n + Q_n}{\alpha^n - \alpha} \text{ où } Q_n \in \mathbb{Z}[a_i, i \leq n-1, b_i, i \leq n];$$

on dit que  $f$  est *formellement linéarisable*.

**Théorème 3.1** (CREMER). *Si  $\liminf |\alpha^q - \alpha|^{1/q} = 0$ , il existe un germe analytique  $f$  non linéarisable.*

*Si  $\liminf |\alpha^q - \alpha|^{\frac{1}{q^M}} = 0$  aucun germe polynomial  $f(z) = \alpha z + a_2 z^2 + \dots + z^d$  n'est linéarisable.*

**Théorème 3.2** (SIEGEL). *S'il existe deux constantes  $c$  et  $M$  strictement positives telles que  $|\alpha^q - \alpha| \geq \frac{c}{q^M}$ , tout germe  $f(z) = \alpha z + a_2 z^2 + \dots$  est localement linéarisable.*

Passons maintenant au cas de deux variables. Soit  $f(x, y) = (\alpha x, \beta y) +$  termes d'ordre supérieur avec  $\alpha, \beta$  de module 1, non racines de l'unité. On parle de *résonance* lorsqu'on a des relations de la forme  $\alpha = \alpha^a \beta^b$  ou  $\beta = \alpha^a \beta^b$  où  $a, b$  désignent des entiers positifs tels que  $a + b \geq 2$ . Un *monôme résonant* est un monôme de la forme  $x^a y^b$ . Il y a une obstruction formelle à la linéarisation : la présence de monômes résonants. On dit que  $\alpha$  et  $\beta$  sont *multiplicativement indépendants* si l'unique solution de  $\alpha^a \beta^b = 1$  avec  $a, b$  dans  $\mathbb{Z}$  est la solution nulle  $(0, 0)$ . On dit que  $\alpha$  et  $\beta$  sont *simultanément diophantiens* s'il existe deux constantes strictement positives  $c$  et  $M$  telles que

$$\min \left( |\alpha^a \beta^b - \alpha|, |\alpha^a \beta^b - \beta| \right) \geq \frac{c}{|a + b|^M} \quad \forall a, b \in \mathbb{N}, a + b \geq 2.$$

**Théorème 3.3.** *Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont simultanément diophantiens,  $f$  est linéarisable.*

*Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont algébriques et multiplicativement indépendants, ils sont simultanément diophantiens.*

On renvoie à [Her87] pour de plus amples détails sur les questions de linéarisation.

## 2. Où chercher des automorphismes d'entropie positive ?

**2.1. Entropie topologique.** Soient  $X$  un espace métrique compact et  $f : X \rightarrow X$  une transformation continue. Soit  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif. Pour tout entier positif  $n$ , on désigne par  $N(n, \varepsilon)$  le cardinal minimum d'une partie  $X_n$  de  $X$  telle que pour tout point  $y$  de  $X$  il existe  $x$  dans  $X_n$  tel que

$$\text{dist}(f^j(x), f^j(y)) \leq \varepsilon, \quad \forall \ 0 \leq j \leq n.$$

On introduit la quantité  $h_{\text{top}}(f, \varepsilon)$  définie par

$$h_{\text{top}}(f, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \log(N(n, \varepsilon)) \right).$$

L'entropie topologique de  $f$  est donnée par

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\text{top}}(f, \varepsilon);$$

cette définition ne dépend pas du choix de la distance.

Soit  $f$  une transformation  $C^\infty$  sur une variété compacte  $\mathcal{M}$ , on a l'inégalité

$$h_{\text{top}}(f) \geq \log r(f^*),$$

i.e. l'entropie topologique est minorée par le logarithme du rayon spectral de l'application linéaire induite par  $f$  sur  $H^*(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ , somme directe des groupes de cohomologie de  $\mathcal{M}$ . Remarquons que la majoration  $h_{\text{top}}(f) \geq \log r(f^*)$  est encore valable dans le cas méromorphe ([DS04]). Lorsque  $\mathcal{M}$  est kählérienne on a un résultat plus précis ; avant de l'énoncé introduisons la notation suivante : pour tout entier  $p$  compris entre 0 et  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}$  on désigne par  $\lambda_p(f)$  le rayon spectral de l'application  $f^*$  agissant sur le groupe de cohomologie de Dolbeault  $H^{p,p}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ .

**Théorème 3.4** ([Gro03, Gro87, Yom87]). *Soit  $f$  une transformation holomorphe sur une variété complexe compacte kählérienne  $\mathcal{M}$ . On a l'égalité*

$$h_{\text{top}}(f) = \max_{0 \leq p \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}} \log \lambda_p(f).$$

**Remarque 3.5.** Le rayon spectral de  $f^*$  est strictement plus grand que 1 si et seulement si l'un des  $\lambda_p(f)$  l'est et, en fait, si et seulement si  $\lambda_1(f)$  l'est. En d'autres termes pour savoir si  $f$  est d'entropie positive il suffit de calculer la croissance de  $(f^n)^* \{\alpha\}$  où  $\{\alpha\}$  est une forme de KÄHLER.

**Exemples 3.6.** – Si  $\mathcal{M}$  est une variété compacte kählérienne, tout élément de la composante connexe de l'identité de  $\text{Aut } \mathcal{M}$  est d'entropie nulle.  
– L'entropie topologique d'un endomorphisme holomorphe  $f$  de l'espace projectif est égale au logarithme du degré topologique de  $f$ .

- Contrairement à un automorphisme élémentaire, un automorphisme de HÉNON est d'entropie positive.

**2.2. Un théorème de CANTAT.** L'énoncé suivant répond à la question : où chercher des automorphismes de surfaces complexes compactes d'entropie positive ?

**Théorème 3.7 ([Can99]).** *Soit  $Z$  une surface complexe compacte. Supposons que  $Z$  possède un automorphisme  $f$  dont l'entropie topologique est positive. Alors*

- *ou bien  $\text{kod } Z = 0$  et  $f$  est conjugué à un automorphisme de l'unique modèle minimal de  $Z$  qui est un tore, une surface K3 ou une surface de ENRIQUES ;*
- *ou bien  $Z$  est rationnelle auquel cas  $Z$  s'obtient en éclatant  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  en au moins 10 points (éventuellement proches) et  $f$  est birationnellement conjugué à un élément de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ .*

*En particulier  $Z$  est une surface kählérienne.*

**Exemples 3.8.** – Commençons par un exemple dû à COBLE. Considérons une courbe sextique  $C$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  avec 10 points doubles. Supposons que  $C$  soit choisie générique. Soit  $Z$  la surface obtenue en éclatant ces 10 points ; on l'appelle *surface de COBLE*. La surface  $Z$  est le quotient d'une surface K3 par une involution ayant des points fixes et les automorphismes de  $Z$  proviennent de ceux de la surface K3 (voir [Cob61]).

Le groupe  $\text{Aut}(Z)$  s'identifie à un sous-groupe discret et de covolume fini de  $\text{SO}(1, 9)$ . Par suite c'est un groupe infini dénombrable contenant un groupe libre non abélien. On peut construire des automorphismes sur  $Z$  de la façon suivante. Soit  $p$  un point double de  $C$ . L'ensemble des courbes de degré 6 passant par les 9 autres points doubles constitue un pinceau de courbes de genre 1. Si on éclate ces 9 points on obtient une surface  $Z_p$  sur laquelle les transformées strictes de ces courbes forment les fibres d'une fibration elliptique singulière  $\pi_p : Z_p \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Remarquons que chacun des diviseurs exceptionnels coupe la fibre générique de  $\pi_p$  en deux points. Considérons l'un de ces diviseurs que nous noterons  $E_0$ . Soient  $E$  un autre diviseur et  $f$  l'automorphisme de  $Z_p$  défini par

- si  $m$  est un point d'une fibre lisse  $F$  de  $\pi_p$ , l'image  $f(m)$  de  $m$  est l'unique point de  $F$  tel que  $f(m) + E \cap F = m + E_0 \cap F$ ;
- cette transformation s'étend aux fibres singulières.

On remarque que  $\pi_p \circ f = \pi_p$ . En faisant varier le choix de  $E_0$  on obtient huit automorphismes. Pour un choix générique de  $C$  ces automorphismes engendrent un groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}^8$ . Chacun de ces automorphismes fixe la fibre singulière obtenue par transformée stricte de  $C$  et fixe le point singulier  $p$  de cette fibre. Quitte à éclater ce point les automorphismes construits se relèvent à la surface de COBLE  $Z$ . En faisant varier  $p$  parmi les singularités de  $C$  on obtient 10 copies de  $\mathbb{Z}^8$  dans  $\text{Aut}(Z)$ ; pour

un choix générique de  $C$  il n'y a pas de relation non triviale, autrement dit le produit libre de 10 copies de  $\mathbb{Z}^8$  se plonge dans  $\text{Aut}(Z)$ .

- On a l'énoncé suivant, dit théorème de TORELLI.

**Théorème 3.9 ([BHPVdV04]).** *Soit  $Z$  une surface K3. Le morphisme*

$$\text{Aut}(Z) \rightarrow \text{GL}(H^2(Z, \mathbb{Z})), \quad f \mapsto f^*$$

*est injectif.*

*Réciproquement supposons que  $F$  soit un élément de  $\text{GL}(H^2(Z, \mathbb{Z}))$  qui préserve la forme d'intersection sur  $H^2(Z, \mathbb{Z})$  ainsi que la décomposition de HODGE de  $H^2(Z, \mathbb{C})$  et le cône de KÄHLER de  $H^2(Z, \mathbb{R})$ ; alors il existe un automorphisme  $f$  sur  $Z$  tel que  $f^* = F$ .*

- Lorsque  $Z$  est un tore  $\mathbb{C}^2/\Gamma$  l'énoncé est le même modulo le fait suivant : le noyau de

$$\text{Aut}(Z) \rightarrow \text{GL}(H^2(Z, \mathbb{Z})), \quad f \mapsto f^*$$

est engendré par les translations et l'involution  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ .

Le cas des surfaces K3 a été étudié par CANTAT et McMULLEN ([Can01, McM02, Sil91, Wan95]) ; celui des surfaces rationnelles est celui qui produit le plus de tels automorphismes ([McM07, BK06, BK09]) d'où l'intérêt qu'il suscite. Néanmoins on ne sait pas déterminer l'ensemble des surfaces rationnelles admettant des automorphismes non triviaux et étant donnée une surface on est incapable de décrire ses automorphismes.

**2.3. Cas des surfaces rationnelles non minimales.** Jusqu'à aujourd'hui on s'est essentiellement intéressés aux surfaces obtenues en éclatant  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  un nombre fini de points ; ceci est justifié par le théorème suivant dû à NAGATA.

**Théorème 3.10 ([Nag60]).** *Soient  $Z$  une surface rationnelle et  $f$  un automorphisme sur  $Z$  tel que  $f_*$  soit d'ordre infini. Il existe une suite d'applications d'éclatement  $\pi_{j+1} : Z_{j+1} \rightarrow Z_j$  d'un point  $p_j$  de  $Z_j$  telles que  $Z_1 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,  $Z_{N+1} = Z$ .*

Néanmoins remarquons qu'une surface obtenue en éclatant  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  en des points génériques n'a pas d'automorphisme non trivial ([Hir88, Koi88]). De plus on a l'énoncé suivant que l'on peut par exemple trouver dans [Dil].

**Proposition 3.11.** *Soient  $Z$  une surface obtenue en éclatant  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  en  $n \leq 9$  points et  $f$  un automorphisme sur  $Z$ . L'entropie topologique  $\log \lambda(f)$  de  $f$  est nulle. De plus, si  $n$  est inférieur ou égal à 8, un itéré de  $f$  est birationnellement conjugué à un automorphisme du plan projectif complexe.*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde : supposons que  $f$  soit d'entropie positive. D'après [Can99] il existe  $\theta$  dans  $H^2(Z, \mathbb{R})$  d'auto-intersection nulle et tel que  $f^*\theta = \lambda(f)\theta$ . Si  $K_Z$  désigne la classe du diviseur canonique sur  $Z$ , on a  $f_*K_Z = f^*K_Z = K_Z$ . On constate que

$$\lambda(f)^{-1} \langle \theta, K_Z \rangle = \langle f^*\theta, K_Z \rangle = \langle \theta, f_*K_Z \rangle = \langle \theta, K_Z \rangle$$

d'où  $\langle \theta, K_Z \rangle = 0$ . Comme la forme d'intersection sur  $Z$  a une unique valeur propre positive et comme  $K_Z^2 \geq 0$  pour  $n \leq 9$ , la classe  $\theta$  s'écrit  $cK_Z$  pour un certain  $c < 0$ . Mais alors  $f^*\theta = \theta \neq \lambda(f)\theta$  : contradiction.

Supposons que  $n$  soit inférieur ou égal à 8 alors  $K_Z^2 > 0$ . Il s'en suit que la forme d'intersection est strictement négative sur le complément orthogonal  $H \subset H^2(Z, \mathbb{R})$  de  $K_Z$ . Comme  $H$  est de dimension finie et invariant par  $f^*$  et comme  $f^*$  préserve  $H^2(Z, \mathbb{Z})$ , la restriction de  $f^*$  à  $H$  est d'ordre fini. Il en résulte l'existence d'un entier  $k$  tel que  $f^{k*}$  soit trivial. En particulier  $f^k$  préserve les diviseurs exceptionnels obtenus en éclatant les  $n$  points de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ; par suite  $f^k$  appartient, à conjugaison près, à  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ .  $\square$

### 3. Propriétés d'un automorphisme d'entropie positive

Soit  $f$  un automorphisme sur une surface kählérienne d'entropie positive. Comme l'indique le résultat qui suit les valeurs propres de  $f^*$  vérifient des propriétés particulières.

**Théorème 3.12.** *Soit  $f$  un automorphisme sur une surface kählérienne tel que  $\lambda(f) > 1$ . Le premier degré dynamique  $\lambda(f)$  est une valeur propre de  $f^*$  avec multiplicité 1 et c'est l'unique valeur propre de module strictement supérieur à 1.*

*Si  $\eta$  est une valeur propre de  $f^*$ , alors soit  $\eta$  appartient à  $\{\lambda(f), 1/\lambda(f)\}$ , soit  $|\eta| = 1$ .*

Soit  $f$  un automorphisme sur une surface kählérienne tel que  $\lambda(f) > 1$ . Notons  $\chi_f$  le polynôme caractéristique de  $f^*$ . C'est un polynôme monique dont le terme constant, qui est le déterminant de  $f^*$ , vaut  $\pm 1$ . Désignons par  $\psi_f$  le polynôme minimal de  $\lambda(f)$ . D'après le Théorème 3.12 les racines de  $\chi_f$ , et celles de  $\psi_f$ , exceptées  $\lambda(f)$  et  $1/\lambda(f)$ , sont sur le cercle unité. Un tel  $\psi_f$  est un *polynôme de SALEM* et  $\lambda(f)$  est un *nombre de SALEM*. Le plus petit nombre de SALEM connu est la racine  $\lambda_{\text{Lehmer}}$  du polynôme de LEHMER

$$L(t) = t^{10} + t^9 - t_7 - t^6 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1$$

dont nous reparlerons au Chapitre 4.

### 4. Trois involutions

Le groupe  $\text{PGL}_3(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_3(\mathbb{C})$  agit sur  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  de la façon suivante

$$\text{PGL}_3(\mathbb{C}) \times \text{Bir}(\mathbb{P}^2) \times \text{PGL}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Bir}(\mathbb{P}^2) \quad (A, f, B) \mapsto AfB^{-1}.$$

Il est naturel de s'intéresser aux transformations birationnelles quadratiques ([CD]); en effet toute transformation birationnelle du plan projectif complexe s'écrit comme un produit

de transformations quadratiques (Théorème 1.7). Introduisons les trois involutions birationnelles quadratiques suivantes qui jouent un rôle particulier

$$\sigma = (yz : xz : xy), \quad \rho = (xy : z^2 : yz), \quad \tau = (x^2 : xy : y^2 - xz).$$

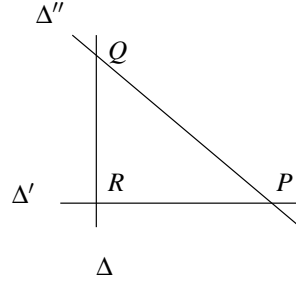
Soit  $f$  une transformation birationnelle de degré 2; alors  $f$  est de l'une des formes suivantes

$$A\sigma B, \quad A\rho B, \quad A\tau B, \quad A, B \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}).$$

Les transformations  $A\sigma B$ , avec  $A, B$  automorphismes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , sont les transformations birationnelles quadratiques génériques; en effet l'adhérence de l'ensemble des transformations birationnelles quadratiques est une variété irréductible et si  $O(f)$  désigne l'orbite de  $f$  sous l'action de  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  on peut vérifier que ([CD])

$$\dim O(\sigma) = 14, \quad \dim O(\rho) = 13, \quad \dim O(\tau) = 12.$$

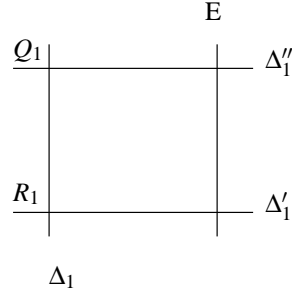
**4.1. Étude de  $\sigma$ .** Les points d'indétermination de  $\sigma$  sont  $P = (1 : 0 : 0)$ ,  $Q = (0 : 1 : 0)$  et  $R = (0 : 0 : 1)$ ; quant au lieu exceptionnel, il est formé des droites  $\Delta = \{x = 0\}$ ,  $\Delta' = \{y = 0\}$  et  $\Delta'' = \{z = 0\}$ .



Commençons par éclater le point  $P$ ; notons  $E$  le diviseur exceptionnel et  $\mathcal{D}_1$  la transformée stricte de  $\mathcal{D}$  :

$$\begin{cases} y = u_1 \\ z = u_1 v_1 \end{cases} \quad \begin{cases} E = \{u_1 = 0\} \\ \Delta''_1 = \{v_1 = 0\} \end{cases} \quad \begin{cases} y = r_1 s_1 \\ z = s_1 \end{cases} \quad \begin{cases} E = \{s_1 = 0\} \\ \Delta'_1 = \{r_1 = 0\} \end{cases}$$





D'une part

$$(u_1, v_1) \rightarrow (u_1, u_1 v_1)_{(y,z)} \rightarrow (u_1 v_1 : v_1 : 1) = \left( \frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1 v_1} \right)_{(y,z)} \rightarrow \left( \frac{1}{u_1}, \frac{1}{v_1} \right)_{(u_1, v_1)} ;$$

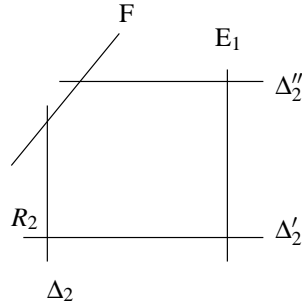
d'autre part

$$(r_1, s_1) \rightarrow (r_1 s_1, s_1)_{(y,z)} \rightarrow (r_1 s_1 : 1 : r_1) = \left( \frac{1}{r_1 s_1}, \frac{1}{s_1} \right)_{(y,z)} \rightarrow \left( \frac{1}{r_1}, \frac{1}{s_1} \right)_{(r_1, s_1)} .$$

Par suite E est envoyé sur  $\Delta_1$ ; comme  $\sigma$  est une involution  $\Delta_1$  est envoyé sur E.

Éclatons le point  $Q_1$ ; cette fois nous désignerons par F le diviseur exceptionnel et par  $\mathcal{D}_2$  la transformée stricte de  $\mathcal{D}_1$  :

$$\begin{cases} x = u_2 \\ z = u_2 v_2 \end{cases} \quad \begin{cases} F = \{u_2 = 0\} \\ \Delta_2'' = \{v_2 = 0\} \end{cases} \quad \begin{cases} x = r_2 s_2 \\ z = s_2 \end{cases} \quad \begin{cases} E = \{s_2 = 0\} \\ \Delta_2 = \{r_2 = 0\} \end{cases}$$



On a

$$(u_2, v_2) \rightarrow (u_2, u_2 v_2)_{(x,z)} \rightarrow (v_2 : u_2 v_2 : 1) = \left( \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_2 v_2} \right)_{(x,z)} \rightarrow \left( \frac{1}{u_2}, \frac{1}{v_2} \right)_{(u_2, v_2)}$$

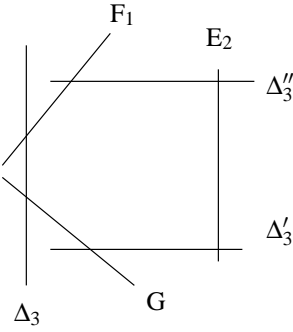
et

$$(r_2, s_2) \rightarrow (r_2 s_2, s_2)_{(x,z)} \rightarrow (1 : r_2 s_2 : r_2) = \left( \frac{1}{r_2 s_2}, \frac{1}{s_2} \right)_{(x,z)} \rightarrow \left( \frac{1}{r_2}, \frac{1}{s_2} \right)_{(r_2, s_2)}.$$

Il s'en suit que  $F \rightarrow \Delta'_2$  d'où  $\Delta'_2 \rightarrow F$ .

Enfin éclatons le point  $R_2$ ; si  $G$  est le diviseur exceptionnel on a

$$\begin{cases} x = u_3 \\ y = u_3 v_3 \end{cases} \quad \begin{cases} G = \{u_3 = 0\} \\ \Delta'_3 = \{v_3 = 0\} \end{cases} \quad \begin{cases} x = r_3 s_3 \\ z = s_3 \end{cases} \quad \begin{cases} E = \{s_3 = 0\} \\ \Delta_2 = \{r_3 = 0\} \end{cases}$$



On constate que

$$(u_3, v_3) \rightarrow (u_3, u_3 v_3)_{(x,y)} \rightarrow (v_3 : 1 : u_3 v_3) = \left( \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_3 v_3} \right)_{(x,y)} \rightarrow \left( \frac{1}{u_3}, \frac{1}{v_3} \right)_{(u_3, v_3)}$$

et

$$(r_3, s_3) \rightarrow (r_3 s_3, s_3)_{(x,y)} \rightarrow (1 : r_3 : r_3 s_3) = \left( \frac{1}{r_3 s_3}, \frac{1}{s_3} \right)_{(x,y)} \rightarrow \left( \frac{1}{r_3}, \frac{1}{s_3} \right)_{(r_3, s_3)}.$$

Il en résulte que  $G \rightarrow \Delta'_3$  et  $\Delta'_3 \rightarrow G$ . Il n'y a plus de point d'indétermination, plus de courbe contractée ; autrement dit  $\sigma$  est conjugué à un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en  $P$ ,  $Q_1$  et  $R_2$ .

Plaçons-nous dans la base  $\{H, E, F, G\}$ . Au premier éclatement  $\Delta$  et  $E$  sont échangés ; le point éclaté étant l'intersection de  $\Delta'$  et  $\Delta''$  on a  $\Delta \rightarrow \Delta + F + G$ . Par suite  $\sigma^* E = H - F - G$ . De même  $\sigma^* F = H - E - G$  et  $\sigma^* G = H - E - F$ . Reste à déterminer  $\sigma^*$ . L'image d'une droite générique par  $\sigma$  est une conique d'où  $\sigma^* H = 2H + m_1 E + m_2 F + m_3 G$ . Soit  $L$  une droite générique d'équation  $\ell = 0$  où  $\ell = a_0 x + a_1 y + a_2 z$ . Un calcul montre que

$$(u_1, v_1) \rightarrow (u_1, u_1 v_1)_{(y,z)} \rightarrow (u_1^2 v_1 : u_1 v_1 : u_1) \rightarrow u_1 (a_0 v_2 + a_1 u_2 v_2 + a_2)$$

s'annule à l'ordre 1 sur  $E = \{u_1 = 0\}$  d'où  $m_1 = 0$ . De même on constate que

$$(u_2, v_2) \rightarrow (u_2, u_2 v_2)_{(x,z)} \rightarrow (u_2 v_2 : u_2^2 v_2 : u_2) \rightarrow u_2(a_0 v_2 + a_1 u_2 v_2 + a_2),$$

resp.

$$(u_3, v_3) \rightarrow (u_3, u_3 v_3)_{(x,y)} \rightarrow (u_3 v_3 : u_3 : u_3^2 v_3) \rightarrow u_3(a_0 v_3 + a_1 + a_2 u_3 v_3)$$

s'annule à l'ordre 1 sur  $F = \{u_2 = 0\}$ , resp.  $G = \{u_3 = 0\}$  d'où  $m_2 = -1$ , resp.  $m_3 = -1$ . Par suite  $\sigma^*H = 2H - E - F - G$  et la matrice caractéristique de  $\sigma$  dans la base  $\{H, E, F, G\}$  est

$$M_\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

#### 4.2. Étude de $\rho$ . À partir des plongements naturels

$$\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), (x : y : 1) \mapsto (x : y : z), \quad \mathbb{C} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), (x, y) \mapsto ((x : 1), (y : 1))$$

on obtient l'identification suivante

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \longleftrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), (x : y : z) \longleftrightarrow ((x : z), (y : z)).$$

On a donc

$$\begin{array}{ccc} (x : y : z) & \longleftrightarrow & ((x : z), (y : z)) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ (xy : z^2 : yz) & \longleftrightarrow & ((xy : yz), (z^2 : yz)) = ((x : z), (z : y)) \end{array}$$

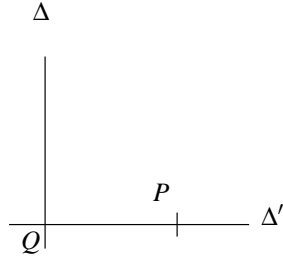
puisque  $((x : z), (z : y))$  est holomorphe sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , la transformation  $\rho$  est un automorphisme sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en un nombre fini de points. Détaillons ceci.

On remarque que

$$\text{Ind } \rho = \{P, Q\}, \quad \text{Exc } \rho = \Delta \cup \Delta'$$

où

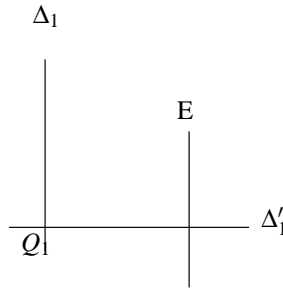
$$P = (0 : 1 : 0), Q = (1 : 0 : 0), \quad \Delta = \{y = 0\}, \Delta' = \{z = 0\}.$$



Posons :

$$\begin{cases} x = r_1 s_1 \\ z = s_1 \end{cases} \quad E = \{s_1 = 0\}$$

$$\begin{cases} x = u_1 \\ z = u_1 v_1 \end{cases} \quad \begin{aligned} E &= \{u_1 = 0\} \\ \Delta' &= \{v_1 = 0\} \end{aligned}$$



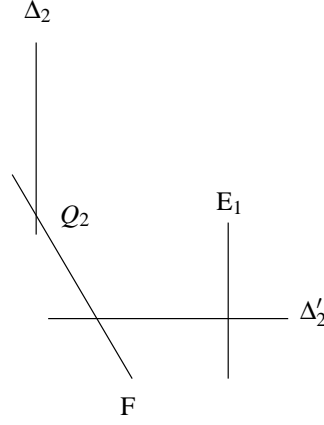
On a  $(r_1, s_1) \rightarrow (r_1 s_1, s_1)_{(x,z)} \rightarrow (r_1 : s_1 : 1)$ ; par suite E est envoyé sur Δ. Puisque ρ est une involution  $\Delta \rightarrow E$ .

Par ailleurs  $(u_1, v_1) \rightarrow (u_1, u_1 v_1)_{(x,z)} \rightarrow (1 : u_1 v_1^2 : v_1)$ .

Éclatons  $Q_1$ , posons

$$\begin{cases} y = r_2 s_2 \\ z = s_2 \end{cases} \quad \begin{aligned} F &= \{s_2 = 0\} \\ \Delta_2 &= \{r_2 = 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = u_2 \\ z = u_2 v_2 \end{cases} \quad \begin{aligned} F &= \{u_2 = 0\} \\ \Delta'_2 &= \{v_2 = 0\} \end{aligned}$$

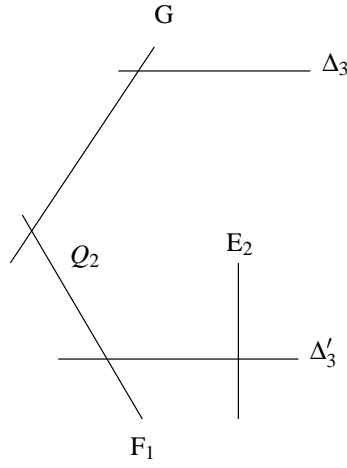


On constate que  $(u_2, v_2) \rightarrow (u_2, u_2 v_2)_{(y,z)} \rightarrow (u_2 v_2^2, u_2 v_2)_{(y,z)} \rightarrow (v_2, u_2 v_2)_{(r_2, s_2)}$ ; ainsi  $F \rightarrow F$  et  $\Delta'_2 \rightarrow Q_2$ .

On a aussi :  $(r_2, s_2) \rightarrow (r_2 s_2, s_2)_{(y,z)} \rightarrow (r_2 : s_2 : r_2 s_2)$ .

Pour finir éclatons  $Q_2$ , posons

$$\begin{cases} r_2 = r_3 s_3 & G = \{s_3 = 0\} \\ s_2 = s_3 & \Delta_3 = \{r_3 = 0\} \end{cases} \quad \begin{cases} r_2 = u_3 & G = \{u_3 = 0\} \\ s_2 = u_3 v_3 & F_1 = \{v_3 = 0\} \end{cases}$$



On a :  $(u_3, v_3) \rightarrow (u_3, u_3 v_3)_{(r_2, s_2)} \rightarrow (u_3^2 v_3, u_3 v_3)_{(y,z)} \rightarrow (1 : v_3 : u_3 v_3)$  et

$$(r_3, s_3) \rightarrow (r_3 s_3, s_3)_{(r_2, s_2)} \rightarrow (r_3 s_3^2, s_3)_{(y,z)} \rightarrow (r_3 : 1 : r_3 s_3).$$

Par suite il n'y a plus de point d'indétermination,  $G$  est envoyé sur  $\Delta'_3$  et puisque  $\rho$  est une involution,  $\Delta'_3$  est envoyé sur  $G$ .

Par conséquent  $\rho$  est conjugué à un automorphisme de  $\text{Bl}_{P,Q_1,Q_2}\mathbb{P}^2$ .

On travaille dans la base  $\{H, E, F, G\}$ . Au premier éclatement  $E$  est envoyé sur  $\Delta$ ; au second  $F$  est fixé et  $\Delta$  est contracté sur  $F \cap \Delta$ . Enfin au dernier  $G$  est envoyé sur  $\Delta'$ . Le second éclatement étant l'éclatement d'un point sur  $\Delta$  on a  $\Delta \rightarrow \Delta + F$ ; puisque le dernier consiste à éclater  $F \cap \Delta$  on a  $\Delta \rightarrow \Delta + F \rightarrow \Delta + F + 2G$ . Puisque les deux premiers points éclatés sont sur  $\Delta'$  on a  $\Delta' \rightarrow \Delta' + E + F$ ; pour finir on éclate un point de  $F \cap \Delta$  d'où  $\Delta' \rightarrow \Delta' + E + F \rightarrow \Delta' + E + F + G$ .

Par suite

$$\rho^*E = H - F - 2G, \quad \rho^*F = F, \quad \rho^*G = H - E - F - G.$$

Reste à déterminer  $\rho^*H$ . L'image d'une droite générique par  $\rho$  étant une conique  $\rho^*H$  s'écrit aussi  $2H + m_0E + m_1F + m_2G$ . Déterminons les  $m_i$ . Soit  $L$  une droite générique; elle a pour équation  $\ell = 0$  avec  $\ell = a_0x + a_1y + a_2z$ . Un calcul montre que

$$(r_1, s_1) \rightarrow (r_1s_1, s_1)_{(x,z)} \rightarrow (r_1s_1 : s_1^2 : s_1) \rightarrow s_1(a_0r_1 + a_1s_1 + a_2)$$

s'annule à l'ordre 1 sur  $E = \{s_1 = 0\}$  d'où  $m_0 = 1$ . On constate que

$$(r_2, s_2) \rightarrow (r_2s_2, s_2)_{(y,z)} \rightarrow (r_2s_2 : s_2^2 : r_2s_2^2) \rightarrow s_2(a_0r_2 + a_1s_2 + a_2r_2s_2)$$

s'annule à l'ordre 1 sur  $F = \{s_2 = 0\}$  d'où  $m_1 = 1$ . On remarque que

$$(r_3, s_3) \rightarrow (r_3s_3^2, s_3)_{(y,z)} \rightarrow (r_3s_3^2 : s_3^2 : r_3s_3^3) \rightarrow s_3^2(a_0r_3 + a_1 + a_2r_3)$$

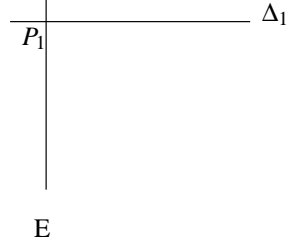
s'annule à l'ordre 2 sur  $G = \{s_3 = 0\}$ , par suite  $m_2 = 2$ . On en déduit que la matrice caractéristique de  $\rho$  dans la base  $\{H, E, F, G\}$

$$M_\rho = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**4.3. Étude de  $\tau$ .** Rappelons que  $\tau$  ne contracte qu'une droite  $\Delta = \{x = 0\}$  et n'éclate qu'un point  $P = (0 : 0 : 1)$ .

$$\begin{array}{c} \text{---} | \text{---} \Delta \\ P \end{array}$$

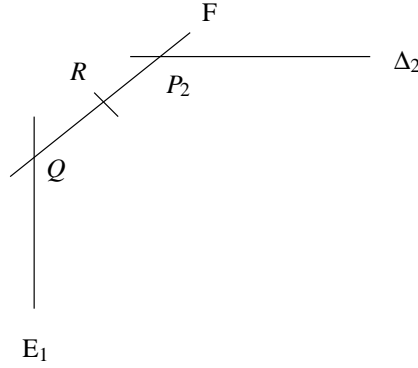
Éclatons le point  $P$ ; posons  $x = r_1s_1$  et  $y = s_1$ .



On constate que  $(r_1, s_1)$  sont des coordonnées au voisinage de  $P_1 = (0, 0)_{(r_1, s_1)}$  dans lesquelles le diviseur exceptionnel  $E$  est donné par  $\{s_1 = 0\}$  et  $\Delta_1$  par  $\{r_1 = 0\}$ . On a

$$\begin{aligned} (r_1, s_1) &\rightarrow (r_1 s_1, r_1)_{(x, y)} \rightarrow (r_1^2 s_1 : r_1 s_1 : s_1 - r_1) \\ &= \left( \frac{r_1^2 s_1}{s_1 - r_1}, \frac{r_1 s_1}{s_1 - r_1} \right)_{(x, y)} \rightarrow \left( r_1, \frac{r_1 s_1}{s_1 - r_1} \right)_{(r_1, s_1)}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $P_1 = (0, 0)_{(r_1, s_1)}$  est indéterminé,  $\Delta_1$  est contracté sur  $P_1$  et  $E$  est fixé. Éclatons le point  $P_1$ . Posons  $r_1 = r_2 s_2$  et  $s_1 = s_2$ .

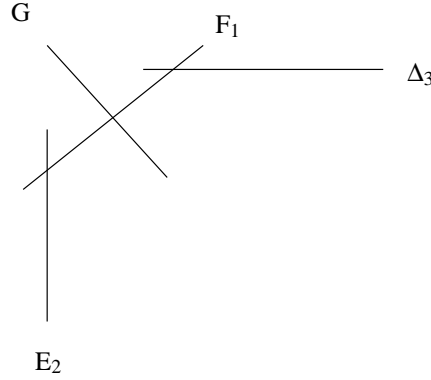


On remarque que  $(r_2, s_2)$  sont des coordonnées au voisinage de  $(0, 0)_{(r_2, s_2)}$ , coordonnées dans lesquelles le diviseur exceptionnel  $F$  a pour équation  $\{s_2 = 0\}$  et  $\Delta_2 = \{r_2 = 0\}$ . On a

$$\begin{aligned} (r_2, s_2) &\rightarrow (r_2 s_2, s_2)_{(r_1, s_1)} \rightarrow (r_2^2 s_2^2 : r_2 s_2 : 1 - r_2) \rightarrow \left( \frac{r_2^2 s_2^2}{1 - r_2}, \frac{r_2 s_2}{1 - r_2} \right)_{(x, y)} \\ &\rightarrow \left( r_2 s_2, \frac{r_2 s_2}{1 - r_2} \right)_{(r_1, s_1)} \rightarrow \left( 1 - r_2, \frac{r_2 s_2}{1 - r_2} \right)_{(r_2, s_2)}. \end{aligned}$$

On constate que  $P_2 = (1, 0)_{(r_2, s_2)}$  est d'indétermination ; par ailleurs  $F$  est fixé et  $\Delta_2$  contracté sur  $P_2$ .

Éclatons le point  $P_2$ . Posons  $r_2 = u_3 + 1$  et  $s_2 = u_3 v_3$



Dans ce cas on note  $G = \{u_3 = 0\}$  le diviseur exceptionnel. Dans les coordonnées  $(u_3, v_3)$  on a

$$\begin{aligned} (u_3, v_3) &\rightarrow (u_3 + 1, u_3 v_3)_{(r_2, s_2)} \rightarrow ((u_3 + 1)^2 u_3 v_3^2 : v_3(u_3 + 1) : -1) \\ &= (-(u_3 + 1)^2 u_3 v_3^2, -v_3(u_3 + 1))_{(x, y)} \rightarrow ((u_3 + 1)u_3 v_3, -v_3(u_3 + 1))_{(r_1, s_1)} \\ &\rightarrow (-u_3, -v_3(u_3 + 1))_{(r_2, s_2)} \rightarrow (-u_3 - 1, v_3)_{(u_3, v_3)}; \end{aligned}$$

on constate que  $G \rightarrow \{u_3 = -1\}$ . Par ailleurs il n'y a plus de point d'indétermination. Ainsi  $\tau$  est conjugué à un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en  $P, P_1$  et  $P_2$ .

On se place dans la base  $\{H, E, F, G\}$ . Après avoir éclaté  $P$ , on constate que le diviseur exceptionnel  $E$  est préservé et  $\Delta$  est envoyé sur  $E \cap \Delta$ . L'éclatement de  $P_1 = E \cap \Delta_1$  envoie  $F$  sur  $F$  et  $\Delta$  sur  $P_2 = F \cap \Delta_2$ . Enfin l'éclatement de  $P_2$  envoie  $G$  sur  $\Delta$ . Puisque  $P$  est sur  $\Delta$  on a  $\Delta \rightarrow \Delta + E$ . Ensuite on éclate le point  $P_1 = \Delta_1 \cap E$  d'où

$$\Delta \rightarrow \Delta + E \rightarrow \Delta + F + E + F = \Delta + E + 2F.$$

Pour finir on éclate  $P_2$  qui est sur  $F$  d'où  $\Delta \rightarrow \Delta + E \rightarrow \Delta + E + 2F \rightarrow \Delta + E + 2F + 2G$ . Il en résulte que

$$\tau^*E = E, \quad \tau^*F = F, \quad \tau^*G = H - E - 2F - 2G.$$

Reste à déterminer  $\tau^*H$ . Puisque l'image d'une droite générique par  $\tau$  est une conique on a  $\tau^*H = 2H + m_0E + m_1F + m_2G$ . Calculons les  $m_j$ . Soit  $L$  une droite générique dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ; elle a pour équation  $\ell = 0$  où  $\ell = a_0x + a_1y + a_2z$ . On constate que

$$(r_1, s_1) \rightarrow (r_1 s_1, s_1)_{(x, y)} \rightarrow (r_1^2 s_1^2 : r_1 s_1^2 : s_1^2 - r_1 s_1) \rightarrow s_1(a_0 r_1^2 s_1 + a_1 r_1 s_1 + a_2(s_1 - r_1))$$



s'annule à l'ordre 1 sur  $E = \{s_1 = 0\}$  donc  $m_0 = 1$ . De même un calcul montre que

$$(r_2, s_2) \rightarrow (r_2 s_2^2, s_2)_{(x,y)} \rightarrow (r_2^2 s_2^4 : r_2 s_2^3 : s_2^2 - r_2 s_2^2) \rightarrow s_2^2 (a_0 r_2^2 s_2^2 + a_1 r_2 s_2 + a_2 (1 - r_2))$$

et  $F = \{s_2 = 0\}$  d'où  $m_1 = 2$ . Enfin on obtient que

$$\begin{aligned} (u_3, v_3) &\rightarrow (u_3 + 1, u_3 v_3)_{(r_2, s_2)} \rightarrow ((u_3 + 1) u_3^2 v_3^2, u_3 v_3)_{(x,y)} \\ &\rightarrow u_3^3 (a_0 (u_3 + 1)^2 u_3 v_3^4 + a_1 (u_3 + 1) v_3^3 - a_2 v_3^2) \end{aligned}$$

et  $G = \{u_3 = 0\}$  ainsi  $m_2 = 3$ . Par suite la matrice caractéristique de  $\tau$  dans la base  $\{H, E, F, G\}$

$$M_\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

## 5. Ensembles de FATOU

**5.1. Définitions et propriétés.** Soit  $f$  un automorphisme sur une variété  $\mathcal{M}$  complexe, compacte. Rappelons que l'ensemble de FATOU  $\mathcal{F}(f)$  de  $f$  est l'ensemble des points qui possèdent un voisinage  $\mathcal{V}$  tel que  $\{f^n|_{\mathcal{V}}, n \geq 0\}$  soit une famille normale. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{U}) = \{g : \mathcal{U} \rightarrow \overline{\mathcal{U}} \mid g = \lim_{n_j \rightarrow +\infty} f^{n_j}\}.$$

On dit que  $\mathcal{U}$  est un *domaine de rotation* si  $\mathcal{G}$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathcal{U})$  autrement dit si tout élément de  $\mathcal{G}$  définit un automorphisme de  $\mathcal{U}$ . Une autre définition possible est la suivante : si  $\mathcal{U}$  est une composante de  $\mathcal{F}(f)$  invariante par  $f$ , on dit que  $\mathcal{U}$  est un domaine de rotation si  $f|_{\mathcal{U}}$  est conjugué à une rotation linéaire ; en dimension 1 cela correspond à posséder un disque de SIEGEL. On a la liste de propriétés suivantes ([BKb]).

- Si  $f$  préserve une forme volume lisse, alors toute composante de FATOU est un domaine de rotation.
- Si  $\mathcal{U}$  est un domaine de rotation,  $\mathcal{G}$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathcal{M})$ .
- Une composante de FATOU  $\mathcal{U}$  est un domaine de rotation si et seulement s'il existe une sous-suite  $(n_j)$  tendant vers  $+\infty$  telle que  $(f^{n_j})$  converge uniformément vers l'identité sur des sous-ensembles compacts de  $\mathcal{U}$ .
- Si  $\mathcal{U}$  est un domaine de rotation,  $\mathcal{G}$  est un groupe de LIE abélien, compact et l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{U}$  est analytique réelle.

Soit  $\mathcal{G}_0$  une composante connexe de l'identité de  $\mathcal{G}$ . Puisque  $\mathcal{G}$  est un groupe de LIE abélien, infini et compact,  $\mathcal{G}_0$  est un tore de dimension  $d \geq 0$ ; notons que  $d \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}$ . On dit que  $d$  est le *rang du domaine de rotation*. Le rang est égal à la dimension de l'adhérence de l'orbite générique d'un point de  $\mathcal{U}$ .

On a des renseignements de nature géométrique sur les domaines de rotation : si  $\mathcal{U}$  est un domaine de rotation, il est pseudo-convexe ([BKb]).

Donnons quelques précisions lorsque  $\mathcal{M}$  est une surface kählérienne possédant un automorphisme d'entropie positive.

**Théorème 3.13 ([BKb]).** *Soient  $Z$  une surface kählérienne compacte et  $f$  un automorphisme sur  $Z$  d'entropie positive. Soit  $\mathcal{U}$  un domaine de rotation de rang  $d$ . Alors  $d \leq 2$ . Si  $d = 2$  la  $\mathcal{G}_0$ -orbite d'un point générique de  $\mathcal{U}$  est un 2-tore réel. Si  $d$  vaut 1, il existe un champ de vecteurs holomorphes induisant sur  $Z$  un feuilletage en surfaces de Riemann dont chaque feuille est invariante par  $\mathcal{G}_0$ .*

On peut utiliser un argument de linéarisation locale pour montrer que certains points fixes appartiennent à l'ensemble de FATOU. Réciproquement linéariser un point fixe de l'ensemble de FATOU est toujours possible.

**5.2. Ensemble de FATOU des automorphismes de HÉNON.** Soit  $f$  un automorphisme de HÉNON. On désigne par  $\mathcal{K}^\pm$  le sous-ensemble de  $\mathbb{C}^2$  dont l'orbite positive/négative est bornée

$$\mathcal{K}^\pm = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid \{f^{\pm n}(x, y) \mid n \geq 0\} \text{ est borné}\}.$$

Posons

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \cap \mathcal{K}^-, \quad \mathcal{J}^\pm = \partial \mathcal{K}^\pm, \quad \mathcal{J} = \mathcal{J}^+ \cap \mathcal{J}^-, \quad \mathcal{U}^+ = \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{K}^+.$$

Énonçons quelques propriétés.

- Les itérés  $f^n$ ,  $n \geq 0$ , forment une famille normale dans l'intérieur de  $\mathcal{K}^+$ .
- Si  $(x, y)$  appartient à  $\mathcal{J}^+$  il n'existe pas de voisinage  $U$  de  $(x, y)$  sur lequel la famille  $\{f^n|_U \mid n \geq 0\}$  soit normale.

On a l'énoncé suivant.

**Proposition 3.14.** *L'ensemble de FATOU d'une application de HÉNON est  $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{J}^+$ .*

**Définitions.** Soit  $\Omega$  une composante de FATOU ;  $\Omega$  est dite *récurrente* s'il existe un compact  $C$  de  $\Omega$  et un point  $m$  de  $C$  tels que  $f^{n_j}(m)$  appartienne à  $C$  pour une infinité de  $n_j \rightarrow +\infty$ . Une composante récurrente de FATOU est nécessairement périodique.

Un point fixe  $m$  de  $f$  est un *foyer* si  $m$  appartient à l'intérieur de la variété stable

$$\mathcal{W}^s(m) = \{p \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(f^n(m), f^n(p)) = 0\}.$$

On dit que  $\mathcal{W}^s(m)$  est le *bassin* de  $m$ . Si  $m$  est un foyer, les valeurs propres de  $Df_{(m)}$  sont de module inférieur à 1.

Un *disque de SIEGEL* (resp. *anneau de HERMAN*) est l'image d'un disque (resp. d'un anneau)  $\Delta$  par une application holomorphe injective  $\phi$  avec la propriété suivante : pour tout  $z$  dans  $\Delta$  on a

$$f\phi(z) = \phi(\alpha z), \quad \alpha = e^{2i\pi\theta}, \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

On peut décrire les composantes de FATOU récurrentes d'un automorphisme de HÉNON.

**Théorème 3.15 ([BS91]).** *Soient  $f$  un automorphisme de HÉNON de déterminant jacobien strictement inférieur à 1 et  $\Omega$  une composante de FATOU récurrente. Alors  $\Omega$  est*

- *ou bien le bassin d'un foyer ;*
- *ou bien un disque de SIEGEL ;*
- *ou bien un anneau de HERMAN.*

Sous certaines conditions les composantes de FATOU d'un automorphisme de HÉNON sont récurrentes.

**Proposition 3.16.** *Les composantes de FATOU d'une application de HÉNON préservant le volume sont périodiques et récurrentes.*

**5.3. Ensemble de FATOU des automorphismes d'entropie positive sur les tores, (quotients de) K3, surfaces rationnelles.** Si  $Z$  est un tore complexe, un automorphisme d'entropie positive est essentiellement un élément de  $GL_2(\mathbb{Z})$ ; le fait que l'entropie soit positive implique que les valeurs propres satisfont :  $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$  et l'ensemble de FATOU est vide.

Supposons que  $Z$  soit une surface K3 ou un quotient d'une surface K3. Puisqu'il existe une forme volume invariante les seules composantes de FATOU possibles sont les domaines de rotation. MCMULLEN a montré l'existence de surfaces K3 non algébriques avec des domaines de rotation de rang 2 (voir [McM02]) ; une autre référence est la suivante [Ogu]. Les autres surfaces compactes possédant des automorphismes d'entropie positive sont des surfaces rationnelles ; dans ce cas il peut y avoir des domaines de rotation de rang 1 et 2 (voir [BK09, McM07]). D'autres phénomènes peuvent arriver tels des bassins attractifs et/ou répulsifs ([BK09, McM07]).



## CHAPITRE 4

### Automorphismes d'entropie positive et groupes de WEYL

Le lien entre les groupes de WEYL et la géométrie birationnelle sur le plan projectif complexe a été abordé dès 1895 dans [Kan95] puis dans [DV36, Nag60, Nag61, Cob61, Giz80, Loo81, Har85, Man86, Har87, Nik87, Har88, DO88, Hir88, Zha01, DZ01].

#### 1. Groupes de WEYL

**1.1. Groupes de WEYL, I.** Soit  $Z$  une surface rationnelle. Considérons la représentation

$$\text{cr}: \text{Aut}(Z) \rightarrow \text{GL}(H^2(Z, \mathbb{Z})), \quad f \mapsto f_*$$

son image est un groupe d'isométries préservant en particulier le produit d'intersection. Soit  $\{e_0, \dots, e_n\}$  une base de  $H^2(Z, \mathbb{Z})$ ; si

$$e_0 \cdot e_0 = 1, \quad e_j \cdot e_j = -1, \forall 1 \leq j \leq n, \quad e_i \cdot e_j = 0, \forall 0 \leq i \neq j \leq n$$

on dit que  $\{e_0, \dots, e_n\}$  est une *base géométrique*.

**Exemple 4.1.** Les bases  $\{H, E, F, G\}$  introduites au §4.1, §4.2 et §4.3 sont des bases géométriques.

Plus généralement supposons que  $\pi: Z \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  soit obtenue en éclatant  $n$  points distincts de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Si  $E_j = \pi^{-1}(p_j)$  désigne la fibre exceptionnelle obtenue en éclatant  $p_j$  et  $\pi^*H$  la classe d'une droite, alors  $\{\pi^*H, E_1, \dots, E_n\}$  est une base géométrique.

Replaçons-nous dans les conditions du Théorème 3.10. Soient  $Z$  une surface rationnelle et  $f$  un automorphisme sur  $Z$  tel que  $f_*$  soit d'ordre infini. Il existe une suite d'applications holomorphes  $\pi_j: Z_{j+1} \rightarrow Z_j$  telles que  $Z_1 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et  $Z_{n+1} = Z$ . Notons  $E_j = \pi_{j+1}^{-1}(p_j) \subset Z_{j+1}$  le diviseur exceptionnel obtenu en éclatant  $p_j$  et  $e_j = \pi_{n+1}^* \dots \pi_{j+1}^*(E_j)$ . Une *configuration exceptionnelle*  $\mathcal{E}$  est la donnée des  $e_j$ . Soit  $\alpha$  un élément de  $H^2(Z, \mathbb{Z})$  tel que  $\alpha \cdot \alpha = -2$ , alors  $R_\alpha(x) = x + (x \cdot \alpha)\alpha$  envoie  $\alpha$  sur  $-\alpha$  et  $R_\alpha$  fixe tout élément de  $\alpha^\perp$ ; autrement dit  $R_\alpha$  est une réflexion dans la direction  $\alpha$ .

Considérons les vecteurs définis par

$$\alpha_0 = e_0 - e_1 - e_2 - e_3, \quad \alpha_j = e_{j+1} - e_j, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Pour tout  $j$  dans  $\{0, \dots, n-1\}$  on a l'égalité  $\alpha_j \cdot \alpha_j = -2$ . Pour  $j$  non nul la réflexion  $R_{\alpha_j}$  induit une permutation sur  $\{e_j, e_{j+1}\}$ . Le sous-groupe engendré par les  $R_{\alpha_j}$ , avec  $1 \leq j \leq n-1$ , coïncide avec l'ensemble des permutations de  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Le groupe  $\langle R_{\alpha_j} \mid 0 \leq j \leq n-1 \rangle$  est appelé *groupe de WEYL* et noté  $W_n \subset O(\mathbb{Z}^{1,n})$ .

Les groupes de WEYL sont, pour  $3 \leq n \leq 8$ , isomorphes aux groupes de COXETER finis

$$A_1 \times A_2, \quad A_4, \quad D_5, \quad E_6, \quad E_7, \quad E_8$$

et sont associés aux surfaces de Del Pezzo<sup>1</sup>. Pour  $k \geq 9$  les groupes de WEYL sont infinis et pour  $k \geq 10$  ils contiennent des éléments dont le rayon spectral est strictement supérieur à 1.

Donnons quelques propriétés de ce groupe. Si  $f$  est un automorphisme de  $Z$ , un résultat de NAGATA assure l'existence d'un unique élément  $w$  de  $W_n$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{1,n} & \xrightarrow{w} & \mathbb{Z}^{1,n} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ H^2(Z, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_*} & H^2(Z, \mathbb{Z}) \end{array}$$

commute ; on dit que  $w$  est *réalisé par l'automorphisme  $f$* . On a aussi l'énoncé suivant.

**Théorème 4.2 ([Dol08]).** *Soit  $Z$  une surface rationnelle qui domine  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .*

- *Le groupe de WEYL  $W_k \subset GL(\text{Pic}(Z))$  ne dépend pas de la configuration exceptionnelle choisie.*
- *Si  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  sont deux configurations exceptionnelles distinctes, il existe  $w$  dans  $W_k$  tel que  $w(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$ .*
- *Si  $Z$  est obtenue en éclatant  $k$  points génériques et si  $\mathcal{E}$  est une configuration exceptionnelle, alors, pour tout  $w$  dans le groupe de WEYL,  $w(\mathcal{E})$  est une configuration exceptionnelle.*

Un produit de générateurs  $R_{\alpha_j}$  est un *élément de COXETER*  $w$  dans  $W_n$ . Notons que tous les éléments de COXETER sont conjugués donc le rayon spectral de  $w$  est bien défini.

L'involution de CREMONA est représentée par la réflexion  $\kappa_{ijk} = R_{\alpha_{ijk}}$  où  $\alpha_{ijk} = e_0 - e_i - e_j - e_k$  pour  $i, j, k \geq 1$  distincts ; elle agit comme suit

$$\begin{aligned} e_0 &\rightarrow 2e_0 - e_i - e_j - e_k, & e_i &\rightarrow e_0 - e_j - e_k, & e_j &\rightarrow e_0 - e_i - e_k \\ e_k &\rightarrow e_0 - e_i - e_j, & e_\ell &\rightarrow e_\ell \text{ si } \ell \notin \{0, i, j, k\} \end{aligned}$$

Lorsque  $n = 3$ , on dira que  $\kappa_{123}$  est l'*élément standard* de  $W_3$ .

1. Une surface de Del Pezzo est isomorphe à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ou à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  ou encore à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en  $1 \leq r \leq 8$  points en « position générale ».

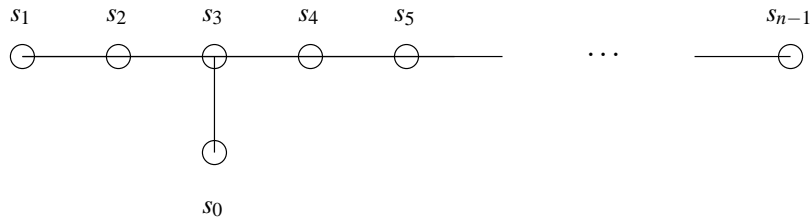
Soit  $\pi_n = \kappa_{123} R_{\alpha_1} \dots R_{\alpha_{n-1}} \in \Sigma_n \subset W_n$  la permutation cyclique  $(123 \dots n)$ . Pour  $n \geq 4$ , on appelle élément standard du groupe de WEYL l'élément  $w$  de  $W_n$  défini par  $w = \pi_n \kappa_{123}$ . Il vérifie

$$w(e_0) = 2e_0 - e_2 - e_3 - e_4, \quad w(e_1) = e_0 - e_3 - e_4, \quad w(e_2) = e_0 - e_2 - e_4,$$

$$w(e_3) = e_0 - e_2 - e_3, \quad w(e_j) = e_{j+1}, \quad 4 \leq j \leq n-2, \quad w(e_{n-1}) = e_1.$$

Comme nous le verrons au §3 il existe une condition suffisante permettant de réaliser des éléments du groupe de WEYL par des automorphismes des surfaces rationnelles obtenues en éclatant  $k$  points distincts de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  le long d'une cubique.

**1.2. Groupes de WEYL, II.** Une autre façon de voir le groupe de WEYL est la suivante. Si  $n \geq 3$  on considère le graphe  $\Gamma_n$  suivant



dont l'ensemble des sommets est  $S_n = \{s_0, \dots, s_{n-1}\}$ . Lorsque  $n = 3$ ,  $\Gamma_3$  possède un seul côté, joignant  $s_1$  à  $s_2$ . Soit  $M = (m_{ij})$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définie par

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 3 & \text{si } s_i \text{ et } s_j \text{ sont « voisins » dans } \Gamma_n \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le groupe de WEYL est donné par

$$W_n = \langle s_0, \dots, s_{n-1} \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle.$$

Considérons  $V_n = \mathbb{R}^{S_n}$  muni de la base  $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$ , base duale de  $\{s_0, \dots, s_{n-1}\}$ , et du produit intérieur

$$B_n(\alpha_j, \alpha_j) = -2 \cos(\pi/m_{ij}).$$

Tout élément  $\alpha$  de  $V_n$  tel que  $B(\alpha, \alpha) = \pm 2$  détermine une réflexion

$$R_\alpha(x) = x - \frac{2B(x, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)} \alpha \tag{4.1}$$

dans le groupe orthogonal  $(V_n, B_n)$ . L'homomorphisme

$$W_n \rightarrow (V_n, B_n), \quad s_i \mapsto R_{\alpha_i}$$

définit l'action géométrique de  $W_n$  sur  $V_n$ .

Les  $\alpha_i$  sont les *racines simples* de  $W_n$ . Les *racines* de  $W_n$  sont les orbites des racines simples

$$\Theta_n = \bigcup W_n \cdot \alpha_i.$$

Notons  $L_n$  le réseau  $\oplus \mathbb{Z}\alpha_i$ . L'égalité (4.1) assure que  $L_n$  est invariant sous l'action de  $W_n$ . Un vecteur  $v = \sum c_i \alpha_i$  de  $V_n$  est *positif* si  $c_i \geq 0$  pour tout  $i$ . On désigne par  $\Theta_n^+$  l'ensemble des racines positives. Toute racine de  $W_n$  est positive ou négative, *i.e.*  $\Theta_n = \Theta_n^+ \cup (-\Theta_n^+)$  (voir [Bou81, Hum90]). Un produit du type

$$s_{\zeta(0)} s_{\zeta(1)} \cdots s_{\zeta(n-1)},$$

où  $\zeta$  désigne une permutation de  $\{0, \dots, n-1\}$ , est un élément de COXETER. Puisque tous les éléments de  $W_n$  sont conjugués, ils ont tous le même ordre  $h_n$ . On a  $h_n = 6, 5, 8, 12, 18, 30$  pour  $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$  et  $h_n = \infty$  pour  $n \geq 9$ .

Considérons  $A(\Gamma_n) = 2\text{Id} - B_n$  la matrice adjointe de  $\Gamma_n$  qui peut être vu comme un opérateur sur  $V_n$ . On a

$$A(\Gamma_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i \text{ et } s_j \text{ sont « voisins » dans } \Gamma_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Proposition 4.3** ([McM07]). *Le rayon spectral  $\lambda_n = \lambda(A(\Gamma_n))$  croît strictement avec  $n$  et  $\lambda_9 = 2$ .*

Le graphe du groupe de WEYL satisfait la propriété suivante : toute arête joint un sommet impair à un sommet pair d'où la décomposition

$$V_n = V_n^0 \oplus V_n^1, \quad V_n^0 = \langle \alpha_i \mid i \text{ pair} \rangle, \quad V_n^1 = \langle \alpha_i \mid i \text{ impair} \rangle$$

et  $A(\Gamma_n) = \begin{bmatrix} 0 & {}^t C_n \\ C_n & 0 \end{bmatrix}$ . Considérons l'élément de COXETER  $w_n$  défini par

$$w_n = (s_0 s_2 s_4 \dots) \cdot (s_1 s_3 s_5 \dots) = w_n^0 \cdot w_n^1.$$

Notons que, puisque  $s_i s_{i+2} = s_{i+2} s_i$ , l'ordre des éléments apparaissant dans l'écriture de  $w_n^0$  (resp.  $w_n^1$ ) n'a pas d'importance. À partir de  $B_n = 2\text{Id} - A(\Gamma_n)$  on obtient

$$w_n^0 = \begin{bmatrix} -\text{Id} & {}^t C_n \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix}, \quad w_n^1 = \begin{bmatrix} \text{Id} & 0 \\ C_n & -\text{Id} \end{bmatrix}$$

puis

$$w_n = \begin{bmatrix} {}^t C_n C_n - \text{Id} & -{}^t C_n \\ C_n & -\text{Id} \end{bmatrix}.$$

Le théorème de Perron-Frobenius assure l'existence d'un vecteur positif  $v_n$  dans  $V_n$ , unique modulo multiplication par un scalaire, tel que  $A(\Gamma_n) \cdot v_n = \lambda_n v_n$ . Considérons  $G_n \subset V_n$  le sous-espace vectoriel de dimension 2 engendré par les parties paire et impaire de  $v_n =$



$v_n^0 + v_n^1$ . L'égalité  $A(\Gamma_n) \cdot v_n = \lambda_n v_n$  implique que  $(C_n \cdot v_n^0, C_n \cdot v_n^1) = \lambda_n (v_n^1, v_n^0)$ . Par suite  $G_n$  est invariant par  $w_n$ ; plus précisément

$$w_{n|G_n} = \begin{bmatrix} \lambda_n^2 - 1 & -\lambda_n \\ \lambda_n & -1 \end{bmatrix}.$$

Cette égalité associée à la Proposition 4.3 permet d'énoncer le résultat suivant.

**Théorème 4.4** ([McM07]). *L'application linéaire  $w_{n|G_n}$  est*

- elliptique, d'ordre  $h_n$ , pour  $n \leq 8$ ,
- parabolique, d'ordre infini, pour  $n = 9$ ,
- hyperbolique, d'ordre infini, pour  $n \geq 10$ .

**Remarque 4.5.** Dans le cas elliptique  $w_{n|G_n}$  est une rotation d'angle  $2\pi/h_n$  (voir [Hum90], §3.7).

**Théorème 4.6** ([McM07]). *Pour  $n \neq 9$ , toute racine  $\alpha$  de  $\Theta_n$  a une projection orthogonale non triviale sur  $G_n \subset V_n$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\alpha$  appartienne à  $\Theta_n^+$ . Soit  $\beta$  une projection de  $\alpha$  sur  $G_n$ . Puisque  $\lambda_n \neq 2$  pour  $n \neq 9$  et puisque  $\alpha = \sum x_i \alpha_i$ ,  $v_n = \sum y_i \alpha_i$  sont des vecteurs positifs on a :

$$B(v_n, \beta) = B(v_n, \alpha) = (2 - \lambda_n) \sum x_i y_i \neq 0;$$

par suite  $\beta \neq 0$ . □

**Corollaire 4.7** ([McM07]). *Soit  $w$  un élément de COXETER de  $W_n$ .*

*Si  $n < 9$ , toute orbite de  $w|_{\Theta_n}$  est formée de  $h_n$  éléments.*

*Si  $n > 9$ , toute orbite de  $w|_{\Theta_n}$  est infinie, i.e.  $w$  n'a pas de racine périodique.*

**1.3. Éléments de COXETER et nombres de SALEM.** Il existe un lien entre les nombres de SALEM et les éléments de COXETER : les premiers apparaissent comme valeurs propres des seconds. Le polynôme caractéristique d'un élément de COXETER  $w$  de  $W_n$  est donné par

$$P_n(t) = \det(t\text{Id} - w) = \frac{t^{n-2}(t^3 - t - 1) + (t^3 + t^2 - 1)}{t - 1}.$$

Pour  $n$  distinct de 9, le polynôme  $P_n$  a des racines simples et pour  $n \geq 10$  le polynôme  $P_n$  s'écrit comme le produit de deux polynômes  $Q_n$  et  $R_n$  où  $Q_n$  désigne un polynôme de SALEM et  $R_n$  un produit de polynômes cyclotomiques. Les racines  $t = \lambda_n^{\pm 1}$  de  $Q_n$  sont des valeurs propres de  $w_{n|G_n}$ .

**Remarque 4.8.** Le polynôme  $Q_{10}$  coïncide avec le polynôme de LEHMER d'où  $\lambda_{10} = \lambda_{\text{Lehmer}}$ .

Étendons la factorisation de  $P_n$  de la façon suivante :

- on définit  $Q_8$  comme étant le polynôme cyclotomique des racines  $h_8$ ième de l'unité ;
- on pose  $Q_9(t) = t - 1$ .

On dit que  $\lambda$  est une *valeur propre dominante* de  $w$  si  $Q_n(\lambda) = 0$ ; autrement dit les valeurs propres dominantes sont les valeurs propres de  $w_n|_{G_n}$  et leur conjugués de GALOIS. Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont les *vecteurs propres dominants* ; ils vérifient la propriété suivante.

**Théorème 4.9 ([McM07]).** *Soient  $w$  un élément de COXETER de  $W_n$  et  $v \in L_n \otimes \mathbb{C}$  un vecteur propre dominant. Si  $n$  est distinct de 9, on a  $v \cdot \alpha \neq 0$  pour toute racine  $\alpha$  de  $\Theta_n$ .*

*Démonstration.* Il suffit de prouver l'énoncé lorsque  $w(v) = \lambda_n^{\pm 1} v$  auquel cas  $v$  appartient à  $G_n \otimes \mathbb{C}$ . Puisque  $n$  est distinct de 9, le sous-espace vectoriel  $G_n$  est engendré par  $v$  et ses conjugués de GALOIS. Si  $v \cdot \alpha = 0$ , alors, pour tout conjugué de GALOIS  $v'$  de  $v$ , on a l'égalité  $v' \cdot \alpha = 0$  et la projection de  $\alpha$  sur  $G_n$  est nulle : contradiction avec le Théorème 4.6.  $\square$

## 2. Cubiques marquées, éclatements marqués, paires marquées

**2.1. Cubiques marquées.** Une *cubique*  $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est une courbe réduite de degré 3. Elle peut être singulière ou réductible ; on désigne par  $C^*$  la partie lisse. Commençons par quelques rappels sur le groupe de PICARD d'une telle courbe ; pour plus de détails on renvoie à [HM98]. On a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \text{Pic}_0(C) \longrightarrow \text{Pic}(C) \longrightarrow H^2(C, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

où  $\text{Pic}_0(C)$  est isomorphe

- soit à un tore  $\mathbb{C}/\Lambda$  (quand  $C$  est lisse) ;
- soit au groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^*$  (ceci correspond au cas où  $C$  est une cubique nodale ou l'union d'une cubique et d'une droite transverse à celle-ci ou l'union de trois droites en position générale) ;
- soit au groupe additif  $\mathbb{C}$  (lorsque  $C$  est une cubique cuspidale ou l'union d'une conique et d'une droite tangente à celle-ci ou l'union de trois droites concourantes).

Une *cubique marquée* est un couple  $(C, \eta)$  formé d'une courbe abstraite  $C$  et d'un homomorphisme  $\eta: \mathbb{Z}^{1,n} \rightarrow \text{Pic}(C)$  tel que

- les sections du fibré en droites  $\eta(e_0)$  proviennent du plongement de  $C$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ;
- il existe des points bases distincts  $p_i$  sur  $C^*$  pour lesquels  $\eta(e_i) = [p_i]$  pour  $i = 2, \dots, n$ .

Les points bases  $p_i$  sont uniquement déterminés par  $\eta$  puisque  $\mathbb{C}^*$  se plonge dans  $\text{Pic}(C)$ . Réciproquement une cubique  $C$  qui se plonge dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et une collection de points distincts sur  $C^*$  déterminent un marquage de  $C$ .

**Remarque 4.10.** Différents marquages de  $C$  peuvent conduire à différents plongements de  $C$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  mais tous ces plongements sont équivalents via l'action de  $\text{Aut}(C)$ .

Soient  $(C, \eta)$  et  $(C', \eta')$  deux cubiques marquées ; un *isomorphisme* entre  $(C, \eta)$  et  $(C', \eta')$  est une application biholomorphe  $f: C \rightarrow C'$  telle que  $\eta' = f_* \circ \eta$ .

Étant donnée une cubique marquée  $(C, \eta)$  on pose

$$W(C, \eta) = \{w \in W_n \mid (C, \eta w) \text{ est une cubique marquée}\},$$

$$\text{Aut}(C, \eta) = \{w \in W(C, \eta) \mid (C, \eta) \text{ et } (C', \eta') \text{ sont isomorphes}\}.$$

On peut décomposer le marquage  $\eta$  de  $C$  en deux parties

$$\eta_0: \ker(\deg \circ \eta) \rightarrow \text{Pic}_0(C), \quad \deg \circ \eta: \mathbb{Z}^{1,n} \rightarrow H^2(C, \mathbb{Z}).$$

On a la propriété suivante.

**Théorème 4.11** ([McM07]). *Soit  $(C, \eta)$  une cubique marquée. Les applications  $\eta_0$  et  $\deg \circ \eta$  déterminent  $(C, \eta)$  à isomorphisme près.*

Une conséquence de cet énoncé est la suivante.

**Corollaire 4.12** ([McM07]). *Une cubique irréductible marquée  $(C, \eta)$  est déterminée, à isomorphisme près, par  $\eta_0: L_n \rightarrow \text{Pic}_0(C)$ .*

**2.2. Éclatements marqués.** Un *éclatement marqué*  $(Z, \Phi)$  est la donnée d'une surface projective lisse  $Z$  et d'un isomorphisme  $\Phi: \mathbb{Z}^{1,n} \rightarrow H^2(Z, \mathbb{Z})$  tels que

- $\Phi$  envoie le produit de MINKOWSKI  $(x \cdot x) = x^2 = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$  sur le produit d'intersection sur  $H^2(Z, \mathbb{Z})$ ;
- il existe un morphisme birationnel  $\pi: Z \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  présentant  $Z$  comme l'éclaté de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  en  $n$  points distincts  $p_1, \dots, p_n$ ;
- $\Phi(e_0) = [H]$  et  $\Phi(e_i) = [E_i]$  pour  $i = 1, \dots, n$  où  $H$  est la préimage d'une droite générique de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et  $E_i$  le diviseur obtenu en éclatant  $p_i$ .

Le marquage détermine le morphisme  $\pi: Z \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  modulo l'action d'un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

Soient  $(Z, \Phi)$  et  $(Z', \Phi')$  deux éclatements marqués ; un *isomorphisme* entre  $(Z, \Phi)$  et  $(Z', \Phi')$  est la donnée d'une application biholomorphe  $F: Z \rightarrow Z'$  tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z}^{1,n} & \\ \Phi \swarrow & & \searrow \Phi' \\ H^2(Z, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{F_*} & H^2(Z', \mathbb{Z}) \end{array}$$

commute. Si  $(Z, \Phi)$  et  $(Z', \Phi')$  sont isomorphes, il existe un automorphisme  $\phi$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  tel que  $p'_i = \phi(p_i)$ .

Supposons qu'il existe deux morphismes birationnels  $\pi, \pi': Z \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  tels que  $Z$  soit la surface obtenue en éclatant  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  en  $p_1, \dots, p_n$  (resp.  $p'_1, \dots, p'_n$ ) via  $\pi$  (resp.  $\pi'$ ). Il existe

une transformation birationnelle  $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \pi \swarrow & & \searrow \pi' \\ \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) & \dashrightarrow \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \end{array}$$

commute ; de plus il existe un unique élément  $w$  dans  $\mathbb{Z}^{1,n}$  tel que  $\Phi' = \Phi_w$ .

Le groupe de WEYL satisfait la propriété suivante dû à NAGATA : soient  $(Z, \Phi)$  un éclatement marqué et  $w$  un élément de  $\mathbb{Z}^{1,n}$ . Si  $(Z, \Phi_w)$  est encore un éclatement marqué, alors  $w$  appartient au groupe de WEYL  $W_n$ . Étant donné un éclatement marqué  $(Z, \Phi)$  on note  $W(Z, \Phi)$  l'ensemble des éléments  $w$  de  $W_n$  tels que  $(Z, \Phi_w)$  soit un éclatement marqué :

$$W(Z, \Phi) = \{w \in W_n \mid (Z, \Phi_w) \text{ est un éclatement marqué}\}.$$

L'action à droite du groupe symétrique consiste à réordonner les points base de la suite d'éclatements donc le groupe des permutations est contenu dans  $W(Z, \Phi)$ . L'énoncé qui suit donne d'autres exemples d'éléments de  $W(Z, \Phi)$ .

**Théorème 4.13** ([McM07]). *Soient  $(Z, \Phi)$  un éclatement marqué et  $\sigma$  l'involution de CREMONA. Désignons par  $p_1, \dots, p_n$  les points base de  $(Z, \Phi)$ . Si pour  $4 \leq k \leq n$ , le point  $p_k$  n'appartient pas à la droite passant par  $p_i$  et  $p_j$ , où  $1 \leq i, j \leq 3$ ,  $i \neq j$ , alors  $(Z, \Phi_{\kappa_{123}})$  est un éclatement marqué.*

*Démonstration.* Soient  $\pi: Z \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  le morphisme birationnel associé à l'éclatement marqué  $(Z, \Phi)$ . Désignons par  $q_1, q_2$  et  $q_3$  les points d'indétermination de  $\sigma$ . Choisissons des coordonnées dans lesquelles  $p_i = q_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ ; alors  $\pi' = \sigma\pi: Z \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est un morphisme birationnel permettant de voir  $(Z, \Phi_{\kappa_{123}})$  comme un éclatement marqué avec points base  $p_1, p_2, p_3$  et  $\sigma(p_i)$  pour  $i \geq 4$ . Ces points sont distincts puisque, par hypothèse,  $p_4, \dots, p_n$  n'appartiennent pas aux droites contractées par  $\sigma$ .  $\square$

Une racine  $\alpha$  de  $\Theta_n$  est une *racine nodale* pour  $(Z, \Phi)$  si  $\Phi(\alpha)$  est représenté par un diviseur effectif  $D$ . Dans ce cas  $D$  se projette sur une courbe de degré  $d > 0$  sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ; par suite  $\alpha = de_0 - \sum_{i \geq 1} m_i e_i$  est une racine positive. Une racine nodale est dite *géométrique* si on peut écrire  $D$  comme une somme de courbes rationnelles lisses.

**Théorème 4.14** ([McM07]). *Soit  $(Z, \Phi)$  un éclatement marqué. Si trois des points bases sont colinéaires,  $(Z, \Phi)$  possède une racine nodale géométrique.*

*Démonstration.* Quitte à réordonner les points bases  $p_1, \dots, p_n$ , on peut supposer que  $p_1, p_2$  et  $p_3$  sont colinéaires ; notons  $L$  la droite passant par ces trois points. À réindexation près on se ramène à : les points bases appartenant à  $L$  sont  $p_1, \dots, p_k$ . La transformée

stricte  $\tilde{L}$  de  $L$  induit une courbe rationnelle lisse sur  $Z$  avec  $[\tilde{L}] = [H - \sum_{i=1}^k E_i]$  d'où

$$\Phi(\alpha_{123}) = [\tilde{L} + \sum_{i=1}^k E_i].$$

□

**Théorème 4.15 ([McM07]).** *Soit  $(Z, \Phi)$  un éclatement marqué. Si  $(Z, \Phi)$  n'a pas de racine géométrique nodale, alors*

$$W(Z, \Phi) = W_n.$$

*Démonstration.* Commençons par remarquer que si  $(Z, \Phi)$  n'a pas de racine nodale géométrique et si  $w$  appartient à  $W(Z, \Phi)$ , alors  $(Z, \Phi_w)$  ne possède pas de racine nodale géométrique. Il suffit donc de démontrer que les générateurs de  $W_n$  appartiennent à  $W(Z, \Phi)$ . Pour les transpositions cela découle de l'inclusion du groupe des permutations dans  $W(Z, \Phi)$ ; pour  $\kappa_{123}$  c'est une conséquence des Théorèmes 4.13 et 4.14. □

**Corollaire 4.16 ([McM07]).** *Une surface marquée possède une racine nodale si et seulement si elle possède une racine nodale géométrique.*

### 2.3. Paires marquées.

2.3.1. *Premières définitions.* Soit  $(Z, \Phi)$  un éclatement marqué. Rappelons qu'une *courbe anticanonique* est une courbe réduite  $Y \subset Z$  telle que la classe de  $Y$  dans  $H^2(Z, \mathbb{Z})$  vérifie

$$[Y] = [3H - \sum_i E_i] = -K_Z. \quad (4.2)$$

Une *paire marquée*  $(Z, \Phi, Y)$  est la donnée d'un éclatement marqué  $(Z, \Phi)$  et d'une courbe anticanonique  $Y$ . Un *isomorphisme* entre les paires marquées  $(Z, \Phi, Y)$  et  $(Z', \Phi', Y')$  est un biholomorphisme  $f$  de  $Z$  dans  $Z'$ , compatible avec les marquages et qui envoie  $Y$  sur  $Y'$ . Si  $n \geq 10$ , alors  $Z$  contient au plus une courbe anticanonique irréductible ; en effet, si une telle courbe  $Y$  existe, alors  $Y^2 = 9 - n < 0$ .

2.3.2. *Des surfaces aux cubiques.* Considérons une paire marquée  $(Z, \Phi, Y)$ . Soit  $\pi$  une projection de  $Z$  sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  compatible avec  $\Phi$ . L'égalité (4.2) implique que  $C = \pi(Y)$  est une cubique passant par chaque point base  $p_i$  avec multiplicité 1. De plus, le fait que  $E_i \cdot Y = 1$  assure que  $\pi: Y \rightarrow C$  est un isomorphisme. L'identification de  $H^2(Z, \mathbb{Z})$  et  $\text{Pic}(Z)$  permet d'obtenir le marquage naturel

$$\eta: \mathbb{Z}^{1,n} \xrightarrow{\Phi} H^2(Z, \mathbb{Z}) = \text{Pic}(Z) \xrightarrow{r} \text{Pic}(Y) \xrightarrow{\pi_*} \text{Pic}(C)$$

où  $r$  est l'application de restriction  $\text{Pic}(Z) \xrightarrow{r} \text{Pic}(Y)$ . Ainsi une paire marquée  $(Z, Y, \Phi)$  détermine canoniquement une cubique marquée  $(C, \eta)$ .

2.3.3. *Des cubiques aux surfaces.* Réciproquement considérons une cubique marquée  $(C, \eta)$ . On dispose de points bases  $p_i \in C$  déterminés par  $(\eta(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  et un plongement de  $C$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  déterminé par  $\eta(e_0)$ . Soient  $(Z, \Phi)$  l'éclatement marqué avec points bases  $p_i$  et  $Y \subset Z$  la transformée stricte de  $C$ . On obtient ainsi une paire marquée  $(Z, \Phi, Y)$  qu'on appelle éclatement de  $(C, \eta)$  et que l'on note  $\text{Bl}(C, \eta)$ .

Les constructions présentées au §2.3.2 et §2.3.3 sont inverses l'une de l'autre. En d'autres termes on a l'énoncé suivant.

**Théorème 4.17 ([McM07]).** *Une paire marquée détermine canoniquement une cubique marquée et réciproquement.*

### 3. Résultats et idée de démonstration

3.0.4. *Énoncés.* Dans [McM07] MCMULLEN produit des exemples d'automorphismes d'entropie positive à l'aide d'éléments du groupe de WEYL.

**Théorème 4.18 ([McM07]).** *Pour  $n \geq 10$ , tout élément de COXETER de  $W_n$  peut être réalisé par un automorphisme  $f_n$  sur une surface rationnelle d'entropie positive  $\log(\lambda_n)$ .*

Plus précisément l'automorphisme  $f_n: Z_n \rightarrow Z_n$  peut être choisi de sorte

- que  $Z_n$  soit le plan projectif complexe éclaté en  $n$  points distincts  $p_1, \dots, p_n$  situés sur une cubique cuspidale  $C$ ,
- qu'il existe une 2-forme méromorphe  $\eta$  sur  $Z_n$  à pôles simples le long de la transformée propre de  $C$  qui ne s'annule pas,
- que  $f_n^*(\eta) = \lambda_n \cdot \eta$ ,
- que  $(\langle f_n \rangle, Z_n)$  soit minimal au sens de MANIN<sup>2</sup>.

Les trois premières propriétés déterminent  $f_n$  de manière unique. Les points  $p_i$  admettent une description simple en termes de vecteurs propres ce qui permet de donner des formules pour  $f_n$ .

Notons que le plus petit nombre de SALEM connu est la racine  $\lambda_{\text{Lehmer}} \sim 1.17628081$  du polynôme de LEHMER

$$L(t) = t^{10} + t^9 - t^7 - t^6 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1.$$

MCMULLEN montre que ce nombre est une borne inférieure pour l'entropie.

**Théorème 4.19 ([McM07]).** *Si  $f$  est un automorphisme d'une surface complexe compacte  $Z$  d'entropie positive, l'entropie de  $f$  est supérieure ou égale à  $\log \lambda_{\text{Lehmer}}$ .*

Constatant que  $\lambda_{10} = \lambda_{\text{Lehmer}}$ , il obtient que cette borne inférieure est réalisée.

---

2. Soient  $Z$  une surface et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut}(Z)$ . Une application birationnelle  $f: Z \dashrightarrow \tilde{Z}$  est dite  $G$ -équivariante si  $\tilde{G} = fGf^{-1} \subset \text{Aut}(\tilde{Z})$ . Le couple  $(G, Z)$  est minimal si tout morphisme birationnel  $G$ -équivariant est un isomorphisme.

**Corollaire 4.20** ([McM07]). *La transformation  $f_{10}: Z_{10} \rightarrow Z_{10}$  est un automorphisme d'une surface rationnelle d'entropie minimum.*

On peut voir qu'un automorphisme sur un tore complexe ne peut pas avoir de disque de SIEGEL ; ce n'est pas le cas sur une surface K3 du moins si celle-ci est non projective ([McM02]). Dans le contexte des surfaces rationnelles MCMULLEN établit l'énoncé suivant.

**Théorème 4.21** ([McM07]). *Il y a une infinité de  $n$  pour lesquels l'élément standard de  $W_n$  peut être réalisé comme un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en un nombre fini de points possédant un disque de SIEGEL.*

**3.0.5. Idée de démonstration.** Les automorphismes construits pour établir les résultats précédents sont obtenus en éclatant des points bases situés sur une cubique  $C$ , les cubiques jouant un rôle particulier du fait que leurs transformées propres  $Y$  sont des courbes anticanoniques.

Supposons que l'élément  $w$  de  $W_n$  soit réalisé par un automorphisme  $F$  de  $Z$  préservant  $Y$ . Comme on l'a vu au Théorème 4.17, à la paire marquée  $(Z, \Phi, Y)$  est canoniquement associée une cubique marquée  $(C, \eta)$ . Alors il existe une transformation birationnelle  $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  telle que : le relevé de  $f$  à  $Z$  coïncide avec  $F$ ,  $f$  préserve  $C$  et  $f$  induit un automorphisme  $f_*$  de  $\text{Pic}_0(C)$  satisfaisant  $\eta_0 w = f_* \eta_0$ . En d'autres termes  $[\eta_0]$  est un point fixe pour l'action naturelle de  $w$  sur l'espace des modules des marquages.

Réciproquement pour réaliser un élément donné  $w$  du groupe  $W_n$  on commence par chercher un point fixe  $\eta_0$  dans l'espace des modules des marquages. Le Corollaire 4.12 associe à  $\eta_0$  une cubique marquée  $(C, \eta)$  à isomorphisme près. Notons  $(Z, \Phi, Y)$  la paire marquée canoniquement déterminée par  $(C, \eta)$ . Supposons que pour tout  $\alpha$  dans  $\Theta_n$ ,  $\eta_0(\alpha)$  soit non nul (ce qui est une condition générique) ; les points bases  $p_i$  ne satisfont pas de relation nodale (ils sont tous distincts, il n'y en a pas 3 alignés, pas 6 sur une conique etc). Un théorème de NAGATA assure alors l'existence d'une seconde projection  $\pi': Z \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  correspondant au marquage  $\Phi w$ . Désignons par  $C'$  la cubique  $\pi'(Y)$ . Puisque  $[\eta_0]$  est un point fixe de  $w$ , les cubiques marquées  $(C', \eta w)$  et  $(C, \eta)$  sont isomorphes. Mais un tel isomorphisme est un automorphisme  $F$  de  $Z$  satisfaisant  $F_* \Phi = \Phi w$ .

Notons que dans [Hir88, Har85, PS81, Dil] il y a aussi des constructions faisant intervenir à la fois les automorphismes de surfaces et les cubiques.

#### 4. Exemples

Considérons la famille de transformations birationnelles  $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  donnée, dans la carte affine  $z = 1$ , par

$$f(x, y) = \left( a + y, b + \frac{y}{x} \right), \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Notons que le cas  $b = -a$  a été étudié dans [PS81] et [BR04].

Les points d'indétermination de  $f$  sont  $p_1 = (0 : 0 : 1)$ ,  $p_2 = (0 : 1 : 0)$  et  $p_3 = (1 : 0 : 0)$ . Posons  $p_4 = (a : b : 1)$  et désignons par  $\Delta$  (resp.  $\Delta'$ ) le triangle de sommets  $p_1, p_2, p_3$  (resp.  $p_2, p_3, p_4$ ). La transformation  $f$  envoie  $\Delta$  sur  $\Delta'$  : le point  $p_1$  (resp.  $p_2$ , resp.  $p_3$ ) est éclaté sur la droite  $(p_1 p_4)$  (resp.  $(p_2 p_3)$ , resp.  $(p_3 p_4)$ ) et les droites  $(p_1 p_2)$  (resp.  $(p_1 p_3)$ , resp.  $(p_2 p_3)$ ) sont contractées sur  $p_2$  (resp.  $p_4$ , resp.  $p_3$ ).

Si  $a$  et  $b$  sont choisis de sorte que  $p_1 = p_4$ , alors  $\Delta$  est invariant par  $f$  et quitte à éclater  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  en  $p_1, p_2, p_3$  on obtient une réalisation de l'élément standard de COXETER dans  $W_3$ . En effet  $f$  envoie une droite générique sur une conique passant par les  $p_i$ ; ainsi  $w(e_0) = 2e_0 - e_1 - e_2 - e_3$ . Le point  $p_1$  (resp.  $p_2$ , resp.  $p_3$ ) est éclaté sur la droite passant par  $p_2$  et  $p_3$  (resp.  $p_1$  et  $p_3$ , resp.  $p_1$  et  $p_2$ ). Il s'en suit que

$$w(e_1) = e_0 - e_2 - e_3, \quad w(e_2) = e_0 - e_1 - e_3, \quad w(e_3) = e_0 - e_1 - e_2.$$

Plus généralement on a l'énoncé suivant.

**Théorème 4.22** ([McM07]). *Désignons par  $p_{i+4}$  l'itéré  $i$ ème  $f^i(p_4)$  de  $p_4$ .*

*La réalisation de l'élément standard de COXETER de  $W_n$  correspond aux couples  $(a, b)$  de  $\mathbb{C}^2$  tels que*

$$p_i \notin (p_1 p_2) \cup (p_2 p_3) \cup (p_3 p_1), \quad p_{n+1} = p_1.$$

*Démonstration.* Supposons qu'il existe un entier  $i$  tel que  $f^i(p_4) = p_{i+4}$ . Soit  $(Z, \pi)$  l'éclatement marqué de points bases  $p_i$ . La transformation  $f$  se relève en un morphisme  $F_0$  de  $Z$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Comme tout  $p_i$  est désormais l'image  $F_0(\ell_i)$  d'une droite de  $Z$ , le morphisme  $F_0$  se relève en un automorphisme  $F$  de  $Z$ ,  $F$  satisfaisant la propriété suivante :  $f$  se relève en  $F$ . Déterminons l'élément  $w$  réalisé par  $F$ . Remarquons que  $f$  envoie une droite générique sur une conique passant par  $p_2, p_3$  et  $p_4$  d'où  $w(e_0) = 2e_0 - e_2 - e_3 - e_4$ . Le point  $p_1$  est éclaté sur la droite passant par  $p_3$  et  $p_4$  donc  $w(e_1) = e_0 - e_3 - e_4$ ; de même on obtient

$$w(e_2) = e_0 - e_2 - e_4, \quad w(e_3) = e_0 - e_2 - e_3, \quad w(e_i) = e_{i+1} \text{ pour } 4 \leq i < n \quad \text{et} \quad w(e_n) = e_1.$$

Réciproquement si un automorphisme  $F : Z \rightarrow Z$  réalise la transformation standard de COXETER  $w = \pi_n \kappa_{123}$ , on peut normaliser les points bases de sorte que

$$\{p_1, p_2, p_3\} = \{(0 : 0 : 1), (0 : 1 : 0), (1 : 0 : 0)\};$$

la transformation birationnelle  $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  dont le relevé coïncide avec  $F$  est la composée de l'involution de CREMONA et d'un automorphisme envoyant  $(p_1, p_2)$  sur  $(p_2, p_3)$ .

Un tel  $f$  est, dans la carte affine  $z = 1$ , de la forme  $f(x, y) = (a', b') + (Ay, By/x)$  soit, à conjugaison près par  $(Bx, By/A)$ , du type  $f(x, y) = (a, b) + (y, y/x)$ .  $\square$



## CHAPITRE 5

### Exemples d'automorphismes d'entropie positive

Dans ce paragraphe nous présentons un exemple dû à BEDFORD et KIM ([BK06, BK09]). Une possibilité pour produire un automorphisme  $f$  sur une surface rationnelle  $Z$  est la suivante : on part d'une transformation birationnelle  $f$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , on trouve une suite d'éclatements  $\pi: Z \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  telle que l'application induite  $f_Z = \pi f \pi^{-1}$  soit un automorphisme sur  $Z$ . La difficulté est de trouver une telle suite  $\pi$ ... Si  $f$  n'est pas un automorphisme du plan projectif complexe,  $f$  contracte une courbe  $C_1$  sur un point  $p_1$ ; la première chose à faire pour construire un automorphisme à partir de  $f$  est d'éclater le point  $p_1$  via  $\pi_1: Z_1 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Dans le meilleur des cas  $f_{Z_1} = \pi_1 f \pi_1^{-1}$  envoie la transformée de  $C_1$  sur le diviseur exceptionnel  $E_1$ . Mais si  $p_1$  n'est pas un point d'indétermination  $f_{Z_1}$  contracte  $E_1$  sur  $p_2 = f(p_1)$ . Autrement dit ce procédé n'aboutit que si  $f$  n'est pas algébriquement stable ce qui va être le cas dans l'exemple qui suit.

Soit  $f_{a,b}$  la transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  définie par

$$f_{a,b}(x, y, z) = (x(bx + y) : z(bx + y) : x(ax + z)),$$

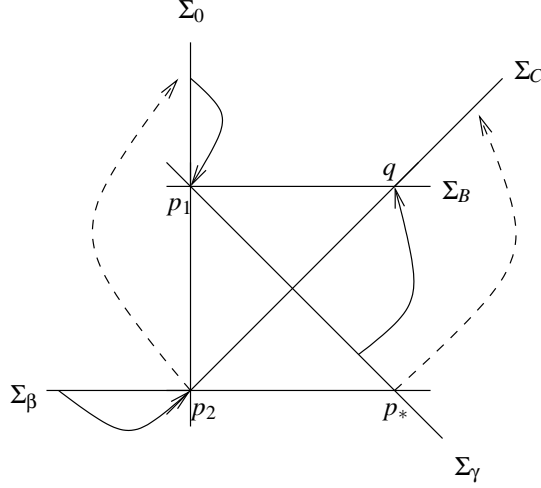
soit en carte affine

$$f_{a,b}(y, z) = \left( z, \frac{a+z}{b+y} \right).$$

On constate que  $\text{Ind } f_{a,b} = \{p_1, p_2, p_*\}$  et que  $\text{Exc } f_{a,b} = \Sigma_0 \cup \Sigma_\beta \cup \Sigma_\gamma$  avec

$$\begin{aligned} p_1 &= (0 : 1 : 0), & p_2 &= (0 : 0 : 1), & p_* &= (1 : -b : -a), \\ \Sigma_0 &= \{x = 0\}, & \Sigma_\beta &= \{bx + y = 0\}, & \Sigma_\gamma &= \{ax + z = 0\}. \end{aligned}$$

Plus précisément  $\Sigma_0$  (resp.  $\Sigma_\beta$ , resp.  $\Sigma_\gamma$ ) est contracté sur  $p_1$  (resp.  $p_2$ , resp.  $q = (1 : -a : 0)$ ) et  $p_2$  (resp.  $p_1$ , resp.  $q = (1 : -a : 0)$ ) est éclaté sur  $\Sigma_0$  (resp. sur la droite  $\Sigma_B = \{z = 0\}$  passant par les points  $p_1$  et  $q$ , resp. sur la droite  $\Sigma_C$  passant par les points  $p_2$  et  $q$ ).



Soient  $\mathcal{Y} = \text{Bl}_{p_1, p_2} \mathbb{P}^2$ ,  $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et  $f_{a,b,\mathcal{Y}} = \pi^{-1} f_{a,b} \pi$ . Montrons qu'après cet éclatement  $\Sigma_0$  n'appartient pas à  $\text{Exc}(f_{a,b,\mathcal{Y}})$ .

Posons  $x = r_2$  et  $y = r_2 s_2$ ; alors  $(r_2, s_2)$  est un système de coordonnées locales dans lequel  $\Sigma_\beta = \{s_2 + b = 0\}$  et  $E_2 = \{r_2 = 0\}$ . On constate que

$$\begin{aligned} (r_2, s_2) &\rightarrow (r_2, r_2 s_2)_{(x,y)} \rightarrow (r_2(b + s_2) : b + s_2 : ar_2 + 1) = \left( \frac{r_2(b + s_2)}{ar_2 + 1}, \frac{b + s_2}{ar_2 + 1} \right)_{(x,y)} \\ &\rightarrow \left( \frac{r_2(b + s_2)}{ar_2 + 1}, \frac{1}{r_2} \right)_{(r_2, s_2)}. \end{aligned}$$

Par suite  $\Sigma_\beta$  est envoyé sur  $E_2$  et  $E_2$  sur  $\Sigma_0$ .

Posons  $x = u_2 v_2$  et  $y = v_2$ ; le diviseur exceptionnel  $E_2$  est décrit par  $v_2 = 0$  et  $\Sigma_0$  par  $u_2 = 0$ . On a

$$\begin{aligned} (u_2, v_2) &\rightarrow (u_2 v_2, v_2)_{(x,y)} \rightarrow (u_2 v_2(bu_2 + 1) : bu_2 + 1 : u_2(au_2 v_2 + 1)) \\ &= \left( \frac{v_2(bu_2 + 1)}{au_2 v_2 + 1}, \frac{bu_2 + 1}{u_2(au_2 v_2 + 1)} \right)_{(x,y)} \rightarrow \left( u_2 v_2, \frac{bu_2 + 1}{u_2(au_2 v_2 + 1)} \right)_{(u_2, v_2)}; \end{aligned}$$

on retrouve que  $E_2$  est envoyé sur  $\Sigma_0$ .

Posons  $x = r_1$ ,  $z = r_1 s_1$ ; dans ces coordonnées  $(r_1, s_1)$  on a  $E_1 = \{r_1 = 0\}$ . De plus

$$(r_1, s_1) \rightarrow (r_1, r_1 s_1)_{(x,z)} \rightarrow (br_1 + 1 : b + s_1(br_1 + 1) : r_1(a + s_1)).$$

Il s'en suit que  $E_1$  est envoyé sur  $\Sigma_B$ .

Posons  $x = u_1 v_1$  et  $z = v_1$ ; dans ces coordonnées  $\Sigma_0 = \{u_1 = 0\}$ ,  $E_1 = \{v_1 = 0\}$  et

$$\begin{aligned} (u_1, v_1) &\rightarrow (u_1 v_1, v_1)_{(x,z)} \rightarrow (u_1(bu_1 v_1 + 1) : bu_1 v_1 + 1 : u_1 v_1(au_1 + 1)) \\ &= \left(u_1, \frac{u_1 v_1(au_1 + 1)}{bu_1 v_1 + 1}\right)_{(x,z)} \rightarrow \left(u_1, \frac{v_1(au_1 + 1)}{bu_1 v_1 + 1}\right)_{(r_1, s_1)}. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\Sigma_0 \rightarrow E_1$  et que  $\Sigma_\beta \rightarrow E_2 \rightarrow \Sigma_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \Sigma_B$ . En particulier  $\text{Ind } f_{a,b,\gamma} = \{p_*\}$  et  $\text{Exc } f_{a,b,\gamma} = \{\Sigma_\gamma\}$ .

On remarque que  $\{H, E_1, E_2\}$  est une base de  $\text{Pic}(\gamma)$ . Le diviseur exceptionnel  $E_1$  est envoyé sur  $\Sigma_B$ ; puisque  $p_1$  appartient à  $\Sigma_B$  on a  $E_1 \rightarrow \Sigma_B \rightarrow \Sigma_B + E_1$ . Par ailleurs  $E_2$  est envoyé sur  $\Sigma_0$ ; comme  $p_1$  et  $p_2$  appartiennent à  $\Sigma_0$  on a  $E_2 \rightarrow \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0 + E_1 + E_2$ . Soit  $H$  une droite générique de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  d'équation  $\ell = 0$  avec  $\ell = a_0 x + a_1 y + a_2 z$ . Son image par  $f_{a,b,\gamma}$  est une conique d'où

$$f_{a,b,\gamma}^* H = 2H + \sum_{i=1}^2 m_i E_i.$$

Déterminons les  $m_i$ . Étant donné que

$$\begin{aligned} (r_2, s_2) &\rightarrow (r_2, r_2 s_2)_{(x,y)} \rightarrow (r_2(b + s_2) : b + s_2 : ar_2 + 1) \\ &\rightarrow r_2(a_0 r_2(b + s_2) + a_1(b + s_2) + a_2(ar_2 + 1)) \end{aligned}$$

et que  $E_2 = \{r_2 = 0\}$  l'entier  $m_2$  vaut 1. D'autre part

$$\begin{aligned} (r_1, s_1) &\rightarrow (r_1, r_1 s_1)_{(x,z)} \rightarrow (br_1 + 1 : b + s_1(br_1 + 1) : r_1(a + s_1)) \\ &\rightarrow s_1 r_1(a_0(bs_1 r_1 + 1) + a_1 s_1(bs_1 r_1 + 1) + s_1 r_1(a + s_1)) \end{aligned}$$

et  $E_1 = \{s_1 = 0\}$  d'où  $m_1 = 1$ . Il s'en suit que

$$M_{f_{a,b,\gamma}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $M_{f_{a,b,\gamma}}$  est  $1 + t - t^3$ . Traduisons les renseignements que contient  $M_{f_{a,b,\gamma}}$ . Soient  $L$  une droite et  $\{L\}$  sa classe dans  $\text{Pic}(\gamma)$ . Si  $L$  n'intersecte ni  $E_1$ , ni  $E_2$ , alors  $\{L\} = H$ . Puisque  $f_{a,b,\gamma}^* H = 2H - E_1 - E_2$  l'image de  $L$  par  $f_{a,b,\gamma}$  est une conique intersectant  $E_1$  et  $E_2$  avec multiplicité 1. Si  $L$  contient  $p_*$ , alors  $f_{a,b,\gamma}(L)$  est l'union de  $\Sigma_C$  et d'une seconde droite. Supposons que  $p_*$  n'appartienne pas à  $L \cup f_{a,b,\gamma}(L)$ , alors

$$\{f_{a,b,\gamma}^2(L)\} = M_{f_{a,b}}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2H - E_2;$$

autrement dit  $f_{a,b,\gamma}^2(L)$  est une conique intersectant  $E_2$  mais pas  $E_1$ . De même si  $p_*$  n'appartient pas à  $L \cup f_{a,b,\gamma}(L) \cup f_{a,b,\gamma}^2(L)$ , alors

$$\{f_{a,b,\gamma}^3(L)\} = M_{f_{a,b}}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3H - E_1 - E_2,$$

i.e.  $f_{a,b,\gamma}^3(L)$  est une cubique intersectant  $E_1$  et  $E_2$  avec multiplicité 1. Si  $p_*$  n'appartient pas à  $L \cup f_{a,b,\gamma}(L) \cup \dots \cup f_{a,b,\gamma}^{n-1}(L)$ , les itérés de  $f_{a,b,\gamma}$  sont holomorphes au voisinage de  $L$  et  $(f_{a,b,\gamma}^*)^n(H) = \{f_{a,b,\gamma}^n L\}$ . Les paramètres  $a$  et  $b$  sont dits *génériques* si  $p_*$  n'appartient pas à  $\bigcup_{j=0}^{\infty} f_{a,b,\gamma}^j(L)$ .

**Théorème 5.1 ([BK09]).** *Supposons que  $a$  et  $b$  soient génériques ; alors  $f_{a,b,\gamma}$  est algébriquement stable et  $\lambda(f_{a,b}) \sim 1.324$  est la plus grande valeur propre du polynôme caractéristique  $t^3 - t - 1$ .*

### 1. Construction de surfaces et d'automorphismes

Considérons le sous-espace  $\mathcal{V}_n$  de  $\mathbb{C}^2$  défini par

$$\mathcal{V}_n = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \mid f_{a,b,\gamma}^j(q) \neq p_* \ \forall 0 \leq j \leq n-1, f_{a,b,\gamma}^n(q) = p_*\}.$$

L'énoncé suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que  $f_{a,b,\gamma}$  soit un automorphisme sur une certaine surface rationnelle.

**Théorème 5.2 ([BK09]).** *La transformation  $f_{a,b,\gamma}$  est conjuguée à un automorphisme d'une certaine surface rationnelle si et seulement si  $(a,b)$  appartient à  $\mathcal{V}_n$  pour un certain  $n$ .*

*Démonstration.* Si  $(a,b)$  n'appartient pas à  $\mathcal{V}_n$ , le Théorème 5.1 assure que  $\lambda(f_{a,b})$  est la plus grande racine de  $t^3 - t - 1$ ; on constate que  $\lambda(f_{a,b})$  n'est pas un nombre de SALEM donc  $f_{a,b}$  n'est pas conjugué à un automorphisme (Théorème 3.12).

Réciproquement supposons qu'il existe un entier  $n$  tel que  $(a,b)$  appartienne à  $\mathcal{V}_n$ . Soit  $Z$  la surface obtenue à partir de  $\gamma$  en éclatant les points  $q, f_{a,b,\gamma}(q), \dots, f_{a,b,\gamma}^n(q) = p_*$  de l'orbite de  $q$ . On peut vérifier que la transformation induite  $f_{a,b,Z}$  est un automorphisme.  $\square$

On s'intéresse maintenant à  $f_{a,b,Z}^*$  que nous noterons  $f_{a,b}^*$ .

**Théorème 5.3 ([BK09]).** *Supposons que  $(a,b)$  appartienne à  $\mathcal{V}_n$  pour un certain entier  $n$ . Si  $n \leq 5$ , l'application  $f_{a,b}$  est périodique de période inférieure ou égale à 30. Si  $n$  vaut 6, la croissance des degrés de  $f_{a,b}$  est quadratique. Enfin si  $n \geq 7$ , alors  $(\deg f_{a,b}^k)_k$  a une croissance exponentielle et  $\lambda(f_{a,b})$  est la plus grande valeur propre du polynôme caractéristique*

$$\chi_n(t) = t^{n+1}(t^3 - t - 1) + t^3 + t^2 - 1.$$

De plus, lorsque  $n$  tend vers l'infini  $\lambda(f_{a,b})$  tend vers la plus grande valeur propre de  $t^3 - t - 1$ .

L'action de  $f_{a,b,z*}$  sur la cohomologie est donnée par

$$E_2 \rightarrow \Sigma_0 = H - E_1 - E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow \Sigma_B = H - E_1 - Q$$

où  $Q$  désigne le diviseur obtenu en éclatant le point  $q$  qui est sur  $\Sigma_B$ . Par ailleurs  $p_*$  étant éclaté par  $f_{a,b}$  sur  $\Sigma_C$ , on a

$$Q \rightarrow f_{a,b}(Q) \rightarrow \dots \rightarrow f_{a,b}^n(Q) \rightarrow \Sigma_C = H - E_2 - Q.$$

Finalement une droite générique  $L$  intersecte  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_\beta$  et  $\Sigma_\gamma$  avec multiplicité 1; l'image de  $L$  est donc une conique passant par  $q$ ,  $p_1$  et  $p_2$  d'où  $H \rightarrow 2H - E_1 - E_2 - Q$ . Ainsi dans la base  $\{H, E_1, E_2, Q, f_{a,b}(Q), \dots, f_{a,b}^n(Q)\}$  on a

$$M_{f_{a,b}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 2. Courbes invariantes

Dans l'esprit de [DJS07] BEDFORD et KIM étudient les courbes invariantes par  $f_{a,b}$ . Il existe des transformations rationnelles  $\phi_j: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$  telles que si  $(a,b) = \phi_j(t)$  pour un certain complexe  $t$ , alors  $f_{a,b}$  a une courbe invariante  $C$  ayant  $j$  composantes irréductibles. Posons

$$\phi_1(t) = \left( \frac{t-t^3-t^4}{1+2t+t^2}, \frac{1-t^5}{t^2+t^3} \right), \quad \phi_2(t) = \left( \frac{t+t^2+t^3}{1+2t+t^2}, \frac{t^3-1}{t+t^2} \right), \quad \phi_3(t) = \left( 1+t, t-\frac{1}{t} \right).$$

**Théorème 5.4 ([BK09]).** Soit  $t$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1, 0, \mathbf{j}, \mathbf{j}^2\}$ . Il existe une cubique  $C$  invariante par  $f_{a,b}$  si et seulement si  $(a,b) = \phi_j(t)$  pour un certain  $1 \leq j \leq 3$  auquel cas  $C$  est décrite par un polynôme homogène  $P_{t,a,b}$  de degré 3.

De plus, si  $P_{t,a,b}$  existe, il est donné, à multiplication près par une constante, par

$$P_{t,a,b}(x,y,z) = ax^3(t-1)t^4 + yz(t-1)t(z+ty) + x(2byzt^3 + y^2(t-1)t^3 + z^2(t-1)(1+bt)) \\ + x^2(t-1)t^3(a(y+tz) + t(y+(t-2b)z)).$$

Plus précisément on a la description suivante.

- Si  $(a,b) = \varphi_1(t)$ , alors  $\Gamma_1 = (P_{t,a,b} = 0)$  est une cubique irréductible cuspidale. La transformation  $f_{a,b}$  a deux points fixes dont l'un est le point singulier de  $\mathcal{C}$ .
- Si  $(a,b) = \varphi_2(t)$ , alors  $\Gamma_2 = (P_{t,a,b} = 0)$  est l'union d'une conique et d'une droite tangente à celle-ci. La transformation  $f_{a,b}$  a, là aussi, deux points fixes.
- Si  $(a,b) = \varphi_3(t)$ , alors  $\Gamma_3 = (P_{t,a,b} = 0)$  est l'union de trois droites concourantes ;  $f_{a,b}$  a encore deux points fixes dont l'un est le point d'intersection des trois composantes de  $\mathcal{C}$ .

Il existe un lien étroit entre les paramètres  $(a,b)$  pour lesquels il existe un complexe  $t$  tel que  $\varphi_j(t) = (a,b)$  et les racines du polynôme caractéristique  $\chi_n$ .

**Théorème 5.5 ([BK09]).** Soient  $n$  un entier,  $j$  un entier compris entre 1 et 3 et  $t$  un complexe. Supposons que  $(a,b) := \varphi_j(t)$  n'appartienne à aucun des  $\mathcal{V}_k$  pour  $k < n$ . Alors  $(a,b)$  appartient à  $\mathcal{V}_n$  si et seulement si  $j$  divise  $n$  et  $t$  est une racine de  $\chi_n$ .

On peut écrire  $\chi_n$  sous la forme  $C_n \psi_n$  où  $C_n$  est le produit des facteurs cyclotomiques et  $\psi_n$  le polynôme minimal de  $\lambda(f_{a,b})$ .

**Théorème 5.6 ([BK09]).** Supposons que  $n$  soit supérieur ou égal à 7. Soit  $t$  une racine de  $\chi_n$  distincte de 1. Alors ou bien  $t$  est une racine de  $\psi_n$ , ou bien  $t$  est une racine de  $\chi_j$  pour un certain  $0 \leq j \leq 5$ .

En décrivant de manière précise ce qu'il se passe lorsque  $t$  n'est pas une racine de  $\psi_n$ , BEDFORD et KIM montrent que le nombre d'éléments de  $\Gamma_j \cap \mathcal{V}_n$  est, pour  $n \geq 7$ , déterminé par le nombre de conjugués de GALOIS de l'unique racine de  $\psi_n$  strictement supérieure à 1 : si  $n \geq 7$  et  $1 \leq j \leq 3$  divise  $n$ , alors

$$\Gamma_j \cap \mathcal{V}_n = \{\varphi_j(t) \mid t \text{ racine de } \psi_n\};$$

en particulier  $\Gamma_j \cap \mathcal{V}_n$  n'est pas vide.

Soient  $X$  une surface rationnelle et  $g$  un automorphisme sur  $X$ . Le couple  $(X, g)$  est dit *minimal* si tout morphisme birationnel  $\pi: X \rightarrow X'$  qui envoie  $(X, g)$  sur  $(X', g')$ , où  $g'$  est un automorphisme sur  $X'$ , est un isomorphisme. Rappelons une question posée dans [McM07]. Soient  $X$  une surface rationnelle et  $g$  un automorphisme sur  $X$ . Supposons que  $(X, g)$  soit minimal. Existe-t-il une puissance négative de la classe du diviseur canonique  $K_X$  admettant une section holomorphe ? On sait depuis [Har87] que la réponse est négative si on enlève l'hypothèse «  $(X, g)$  minimal ».

**Théorème 5.7 ([BK09]).** *Il existe une surface  $Z$  et un automorphisme  $f_{a,b}$  sur  $Z$  d'entropie positive tels que  $(Z, f_{a,b})$  soit minimal et tels que  $f_{a,b}$  ne possède pas de courbe invariante.*

Si  $g$  est un automorphisme sur une surface rationnelle  $X$  telle qu'une puissance négative de  $K_X$  admette une section holomorphe,  $g$  préserve une courbe ; par conséquent le Théorème 5.7 répond à la question de McMULLEN.

### 3. Domaines de rotation

Supposons que  $n$  soit supérieur ou égal à 7 auquel cas  $f_{a,b}$  n'est pas périodique ; s'il y a un domaine de rotation, son rang vaut 1 ou 2. Nous allons voir que les deux arrivent ; commençons par ceux de rang 1.

**Théorème 5.8 ([BK09]).** *Supposons que  $n$  soit supérieur ou égal à 7, que  $j$  divise  $n$  et que  $(a, b)$  appartienne à  $\Gamma_j \cap \mathcal{V}_n$ . Il existe un complexe  $t$  tel que  $(a, b) = \phi_j(t)$ . Si  $t$  est un conjugué de GALOIS de  $\lambda(f_{a,b})$  distinct de  $\lambda(f_{a,b})$  et  $\lambda(f_{a,b})^{-1}$ , alors  $f_{a,b}$  a un domaine de rotation de rang 1 centré en*

$$\left( \frac{t^3}{1+t}, \frac{t^3}{1+t} \right) \text{ si } j = 1, \quad \left( -\frac{t^2}{1+t}, -\frac{t^2}{1+t} \right) \text{ si } j = 2, \quad (-t, -t) \text{ si } j = 3.$$

Passons à ceux de rang 2.

**Théorème 5.9 ([BK09]).** *Considérons un entier  $n$  supérieur ou égal à 8, un entier  $j$  à valeurs dans  $\{2, 3\}$  qui divise  $n$ . Supposons que  $(a, b) = \phi_j(t)$  et que  $|t| = 1$  ; supposons de plus que  $t$  soit une racine de  $\psi_n$ . Notons  $\eta_1, \eta_2$  les valeurs propres de  $Df_{a,b}$  au point*

$$m = \left( \frac{1+t+t^2}{t+t^2}, \frac{1+t+t^2}{t+t^2} \right) \text{ si } j = 2, \quad m = \left( 1 + \frac{1}{t}, 1 + \frac{1}{t} \right) \text{ si } j = 3.$$

Si  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont de module 1, alors  $f_{a,b}$  a un domaine de rotation de rang 2 centré en  $m$ .

Il peut y avoir coexistence de domaines de rotation de rang 1 et 2.

**Théorème 5.10.** *Supposons que  $n$  soit supérieur ou égal à 8, que  $j$  soit égal à 2 ou 3 et que  $j$  divise  $n$ . Il existe  $(a, b)$  dans  $\Gamma_j \cap \mathcal{V}_n$  tel que  $f_{a,b}$  possède un domaine de rotation de rang 2 centré en*

$$\left( \frac{1+t+t^2}{t+t^2}, \frac{1+t+t^2}{t+t^2} \right) \text{ si } j = 2, \quad \left( 1 + \frac{1}{t}, 1 + \frac{1}{t} \right) \text{ si } j = 3$$

ainsi qu'un domaine de rotation de rang 1 centré en

$$\left( -\frac{t^2}{1+t}, -\frac{t^2}{1+t} \right) \text{ si } j = 2, \quad (-t, -t) \text{ si } j = 3.$$

#### 4. Groupe de WEYL

Rappelons que  $E_1$  et  $E_2$  sont les diviseurs obtenus en éclatant  $p_1$  et  $p_2$ . Pour simplifier introduisons les notations suivantes :  $E_0 = H$  et  $E_3 = Q$ ,  $E_4 = f(Q)$ ,  $\dots$ ,  $E_n = f^{n-3}(Q)$ ,  $\pi_i$  éclatement associé au diviseur  $E_i$ . Posons

$$e_0 = E_0, \quad e_i = (\pi_{i+1} \dots \pi_n)^* E_i, \quad 1 \leq i \leq n;$$

la base  $\{e_0, \dots, e_n\}$  de  $\text{Pic}(Z)$  est géométrique.

BEDFORD et KIM montrent qu'ils peuvent appliquer le Théorème 4.22 et en déduisent l'énoncé suivant.

**Théorème 5.11 ([BK09]).** *Soient  $X$  une surface rationnelle obtenue en éclatant  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  en un nombre fini de points  $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et  $F$  un automorphisme sur  $X$  représentant l'élément standard du groupe de WEYL  $W_n$  avec  $n \geq 5$ . Il existe un automorphisme  $A$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et des complexes  $a$  et  $b$  tels que*

$$f_{a,b} A \pi = A \pi F.$$

De plus ils obtiennent qu'une représentation de l'élément standard du groupe de WEYL peut être obtenue à partir de  $f_{a,b,\gamma}$ .

**Théorème 5.12 ([BK09]).** *Soient  $X$  une surface rationnelle et  $F$  un automorphisme sur  $X$  représentant l'élément standard du groupe de WEYL  $W_n$ . Il existe*

- une surface  $\tilde{\gamma}$  obtenue en éclatant  $\gamma$  en un nombre fini de points distincts  $\pi: \tilde{\gamma} \rightarrow \gamma$ ,
- un automorphisme  $g$  sur  $\tilde{\gamma}$ ,
- $(a, b)$  dans  $\mathcal{V}_{n-3}$

tels que  $(F, X)$  soit conjugué à  $(g, \tilde{\gamma})$  et  $\pi g = f_{a,b,\gamma} \pi$ .

#### 5. Description des conditions pour obtenir un automorphisme

Dans [BK06] est étudiée la famille  $(F_{A,B})$  définie dans la carte  $x = 1$  par

$$F_{A,B} = \left( z, \frac{a_0 + a_1 y + a_2 z}{b_0 + b_1 y + b_2 z} \right), \quad A = (a_0, a_1, a_2), B = (b_0, b_1, b_2);$$

on remarque que  $(f_{a,b})$  en est une sous-famille. On peut dans ce cadre définir des espaces de paramètres  $\mathcal{V}_n$  qui correspondent aux paramètres pour lesquels l'application n'est pas algébriquement stable « au  $n$ -ième itéré ». Il y a une action de groupes naturels sur l'espace des paramètres  $\mathcal{V}_n$ ; en effet si  $(\eta, c, \mu)$  appartient à  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  on a les actions suivantes

- (a1)  $(u, v) \mapsto (\eta u, \eta v)$
- (a2)  $(u, v) \mapsto (u_0, c u_1, c u_2, c v_0, c^2 v_1, c^2 v_2)$
- (a3)  $(u, v) \mapsto (u_0 + \mu(u_1 + u_2) - \mu(v_0 + \mu(v_1 + v_2)), u_1 - \mu v_1, u_2 - \mu v_2, v_0 + \mu(v_1 + v_2), v_1, v_2).$



La première action correspond à l'homogénéité de  $F_{A,B}$ , les deux dernières à des actions par conjugaison linéaire sur  $F_{A,B}$

$$\left(\frac{1}{c}y, \frac{1}{c}z\right) F_{A,B}(cy, cz) = \left(z, \frac{a_0 + a_1 cy + a_2 cz}{b_0 c + b_1 c^2 y + b_2 c^2 z}\right)$$

et

$$\begin{aligned} & (y - \mu, z - \mu) F_{A,B}(y + \mu, z + \mu) \\ &= \left(z, \frac{a_0 + \mu(a_1 + a_2) - \mu(b_0 + \mu(b_1 + b_2)) + (a_1 - \mu b_1)y + (a_2 - \mu b_2)z}{b_0 + \mu(b_1 + b_2) + b_1 y + b_2 z}\right). \end{aligned}$$

L'ensemble  $\mathcal{V}_n$  est défini par la condition  $f_{a,b}^n(q) = p$ . Les coefficients des équations définissant  $\mathcal{V}_n$  sont des entiers positifs ; en particulier  $\mathcal{V}_n$  est invariant par conjugaison complexe. En exploitant ces équations BEDFORD et KIM obtiennent la description suivante ([BK06])

- $\mathcal{V}_0$  : orbite de  $(a, b) = (0, 0)$  sous l'action de  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$ .
- $\mathcal{V}_1$  : orbite de  $(a, b) = (1, 0)$  sous l'action de  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$ .
- $\mathcal{V}_2$  : orbite de  $(a, b) = \left(\frac{1+i}{2}, i\right)$ .
- $\mathcal{V}_3$  : orbites de  $\left\{\left(\frac{2-\sqrt{3}+i}{2}, i\right), \left(\frac{2+\sqrt{3}+i}{2}, i\right)\right\}$  et de leurs conjugués.
- $\mathcal{V}_4$  : orbites de  $\{(a_0, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$  et de leurs conjugués où  $a_i$  (resp.  $b_i$ ) est une racine de  $1 - 3x + 9x^2 - 24x^3 + 36x^4 - 27x^5 + 9x^6$  (resp.  $1 + 6x^2 + 9x^4 + 3x^6$ ).
- $\mathcal{V}_5$  : orbites de  $\{(a_0, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$  et de leurs conjugués où  $a_i$  (resp.  $b_i$ ) est une racine de  $1 + 3x^2 - 20x^3 + 49x^4 - 60x^5 + 37x^6 - 10x^7 + x^8$  (resp.  $1 + 7x^2 + 14x^4 + 8x^6 + x^8$ ).
- $\mathcal{V}_6$  : les équations de  $\mathcal{V}_6$  sont divisibles par  $b^2$  donc tous les couples de paramètres  $(a, 0)$  avec  $a \notin \{0, 1\}$  appartiennent à  $\mathcal{V}_6$ ; de plus  $\mathcal{V}_6$  contient les orbites de

$$\left\{\left(\frac{3 \pm \sqrt{5} + 2i\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}}}{4}, i\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}}\right)\right\}$$

et de leurs conjugués.



## CHAPITRE 6

### D'autres exemples

#### 1. Familles continues d'automorphismes d'entropie positive

Dans [BKa] BEDFORD et KIM étudient la famille de transformations birationnelles définie dans la carte  $x = 1$  par

$$f(y, z) = \left( z, -y + cz + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ pair}}}^{k-2} \frac{a_j}{y^j} + \frac{1}{y^k} \right), \quad a_j \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}, k \geq 2.$$

**1.1. Construction de surfaces rationnelles et d'automorphismes.** Les auteurs construisent des surfaces en éclatant  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  en un nombre fini de points sur lesquelles  $f$  est conjugué à un automorphisme d'entropie positive.

**Théorème 6.1.** *Soient  $j, n$  deux entiers premiers entre eux tels que  $1 \leq j \leq n$ . Il existe un sous-ensemble non vide  $C_n$  de  $\mathbb{R}$  tel que, pour tout  $k \geq 2$  pair et pour tout  $(c, a_j)$  dans  $C_n \times \mathbb{C}$ , la transformation  $f$  soit conjuguée à un automorphisme sur une certaine surface rationnelle d'entropie  $\log \lambda_{n,k}$  où  $\log \lambda_{n,k}$  est la plus grande racine du polynôme*

$$\chi_{n,k} = 1 - k \sum_{j=1}^{n-1} x^j + x^n.$$

Disons un mot sur la construction de  $C_n$ . La droite  $\Delta = \{x = 0\}$  est invariante par  $f$ . Écrivons les points de  $\Delta \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$  sous la forme  $(0 : 1 : w)$ ; alors  $f(0 : 1 : w) = (0 : 1 : c - \frac{1}{w})$ . La restriction de  $f$  à  $\Delta$  coïncide avec  $g(w) = c - \frac{1}{w}$ . L'ensemble des valeurs de  $c$  pour lesquelles  $g$  est périodique de période  $n$  est

$$\{2 \cos(j\pi/n) \mid 0 < j < n, (j, n) = 1\}.$$

Posons  $w_s = g^{s-1}(c)$  pour  $1 \leq s \leq n-1$ , autrement dit les  $w_i$  codent l'orbite de  $(0 : 1 : 0)$  sous l'action de  $f$ . Les  $w_j$  satisfont les propriétés suivantes

- $w_j w_{n-1-j} = 1$ ;
- si  $n$  est pair  $w_1 \dots w_{n-2} = 1$ ;
- si  $n$  est impair, posons  $w_*(c) = w_{(n-1)/2}$  auquel cas  $w_1 \dots w_{n-2} = w_*$ .

Nous allons détailler l'éventualité  $n = 3, k = 2$ , auquel cas  $C_3 = \{-1, 1\}$ . Supposons que  $c = 1$ ; autrement dit

$$f = (xz^2 : z^3 : x^3 + z^3 - yz^2).$$

La transformation  $f$  contracte une seule droite  $\Delta'' = \{z = 0\}$  sur le point  $R = (0 : 0 : 1)$  et éclate un seul point,  $Q = (0 : 1 : 0)$ .

Dans un premier temps nous allons éclater  $Q$  à la source et  $R$  au but. Posons

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} x = u_1 \\ z = u_1 v_1 \end{array} \right. & \begin{array}{l} E = \{u_1 = 0\} \\ \Delta'' = \{v_1 = 0\} \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} x = a_1 \\ z = a_1 b_1 \end{array} \right. & F = \{a_1 = 0\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = r_1 s_1 \\ z = s_1 \end{array} \right. & E = \{s_1 = 0\} & \left\{ \begin{array}{l} x = c_1 d_1 \\ z = d_1 \end{array} \right. & F = \{d_1 = 0\} \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} (u_1, v_1) &\rightarrow (u_1, u_1 v_1)_{(x,z)} \rightarrow (u_1 v_1^2 : u_1 v_1^3 : u_1 + u_1 v_1^3 - v_1^2) \\ &= \left( \frac{u_1 v_1^2}{u_1 + u_1 v_1^3 - v_1^2}, \frac{u_1 v_1^3}{u_1 + u_1 v_1^3 - v_1^2} \right)_{(x,y)} \rightarrow \left( \frac{u_1 v_1^2}{u_1 + u_1 v_1^3 - v_1^2}, v_1 \right)_{(a_1, b_1)} \end{aligned}$$

et

$$(r_1, s_1) \rightarrow (r_1 s_1, s_1)_{(x,z)} \rightarrow (r_1 s_1 : s_1^2 : r_1^3 s_1 + s_1 - 1).$$

Par suite  $E$  est envoyé sur  $F$ ,  $\Delta''$  est contracté sur  $S = (0, 0)_{(a_1, b_1)}$  et  $Q_1 = (0, 0)_{(u_1, v_1)}$  est un point d'indétermination.

Poursuivons en éclatant  $Q_1$  à la source et  $S$  au but

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_2 \\ v_1 = u_2 v_2 \end{array} \right. & G = \{u_2 = 0\} & \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_2 \\ b_1 = a_2 b_2 \end{array} \right. & H = \{a_2 = 0\} \\ \left\{ \begin{array}{l} u_1 = r_2 s_2 \\ v_1 = s_2 \end{array} \right. & G = \{s_2 = 0\} & \left\{ \begin{array}{l} a_1 = c_2 d_2 \\ b_1 = d_2 \end{array} \right. & H = \{d_2 = 0\} \end{array}$$

On a dans les différents systèmes de coordonnées

$$\begin{aligned} (u_2, v_2) &\rightarrow (u_2, u_2 v_2)_{(u_1, v_1)} \rightarrow (u_2^2 v_2^2 : u_2^3 v_2^3 : 1 + u_2^3 v_2^3 - v_2^2) = \left( \frac{u_2^2 v_2^2}{1 + u_2^3 v_2^3 - v_2^2}, \frac{u_2^3 v_2^3}{1 + u_2^3 v_2^3 - v_2^2} \right)_{(x,y)} \\ &\rightarrow \left( \frac{u_2^2 v_2^2}{1 + u_2^3 v_2^3 - v_2^2}, u_2 v_2 \right)_{(a_1, b_1)} \rightarrow \left( \frac{u_2 v_2}{1 + u_2^3 v_2^3 - v_2^2}, u_2 v_2 \right)_{(c_2, d_2)}; \end{aligned}$$

ainsi  $G$  est contracté sur  $T = (0, 0)_{(c_2, d_2)}$  et  $U = (0, 0)_{(r_2, s_2)}$  est indéterminé. De plus on a

$$(u_1, v_1) \rightarrow \left( \frac{u_1 v_1^2}{u_1 + u_1 v_1^3 - v_1^2}, v_1 \right) \rightarrow \left( \frac{u_1 v_1}{u_1 + u_1 v_1^3 - v_1^2}, v_1 \right)_{(c_2, d_2)}$$

donc  $\Delta''$  est contracté sur  $T$ .

Continuons en éclatant  $U$  à la source et  $T$  au but

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} r_2 = u_3 \\ s_2 = u_3 v_3 \end{array} \right. & \begin{array}{l} K = \{u_3 = 0\} \\ G_1 = \{v_3 = 0\} \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} c_2 = a_3 \\ d_2 = a_3 b_3 \end{array} \right. & L = \{a_3 = 0\} \\ \left\{ \begin{array}{l} r_2 = r_3 s_3 \\ s_2 = s_3 \end{array} \right. & K = \{s_3 = 0\} & \left\{ \begin{array}{l} c_2 = c_3 d_3 \\ d_2 = d_3 \end{array} \right. & L = \{d_3 = 0\} \end{array}$$

On constate que

$$\begin{aligned} (u_3, v_3) &\rightarrow (u_3, u_3 v_3)_{(r_2, s_2)} \rightarrow (u_3^2 v_3^2 : u_3^3 v_3^3 : 1 + u_3^3 v_3^3 - v_3) \\ &= \left( \frac{u_3^2 v_3^2}{1 + u_3^3 v_3^3 - v_3}, \frac{u_3^3 v_3^3}{1 + u_3^3 v_3^3 - v_3} \right)_{(x, y)} \rightarrow \left( \frac{u_3^2 v_3^2}{1 + u_3^3 v_3^3 - v_3}, u_3 v_3 \right)_{(a_1, b_1)} \\ &\rightarrow \left( \frac{u_3 v_3}{1 + u_3^3 v_3^3 - v_3}, u_3 v_3 \right)_{(c_2, d_2)} \rightarrow \left( \frac{1}{1 + u_3^3 v_3^3 - v_3}, u_3 v_3 \right)_{(c_3, d_3)} \end{aligned}$$

et

$$(r_3, s_3) \rightarrow (r_3 s_3, s_3)_{(r_2, s_2)} \rightarrow (r_3 s_3^2 : r_3 s_3^3 : r_3 + r_3 s_3^3 - 1);$$

par conséquent  $W = (1, 0)_{(r_3, s_3)}$  est indéterminé,  $K$  est envoyé sur  $L$  et  $G_1$  est contracté sur  $V = (1, 0)_{(c_3, d_3)}$ . Par ailleurs on note que

$$(u_1, v_1) \rightarrow \left( \frac{u_1 v_1}{u_1 + u_1 v_1^3 - v_1^2}, v_1 \right)_{(c_2, d_2)} \rightarrow \left( \frac{u_1}{u_1 + u_1 v_1^3 - v_1^2}, v_1 \right)_{(c_3, d_3)}$$

ainsi  $\Delta_3''$  est contracté sur  $V$ .

Éclatons  $W$  à la source et  $V$  au but

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} r_3 = u_4 + 1 \\ s_3 = u_4 v_4 \end{array} \right. & M = \{u_4 = 0\} & \left\{ \begin{array}{l} c_3 = a_4 + 1 \\ d_3 = a_4 b_4 \end{array} \right. & N = \{a_4 = 0\} \\ \left\{ \begin{array}{l} r_3 = r_4 s_4 + 1 \\ s_3 = s_4 \end{array} \right. & M = \{s_4 = 0\} & \left\{ \begin{array}{l} c_3 = c_4 d_4 + 1 \\ d_3 = d_4 \end{array} \right. & N = \{d_4 = 0\} \end{array}$$

D'une part

$$(u_1, v_1) \rightarrow \left( \frac{u_1}{u_1 + u_1 v_1^3 - v_1^2}, v_1 \right)_{(c_3, d_3)} \rightarrow \left( \frac{u_1^2 v_1 - v_1}{u_1 + u_1 v_1^3 - v_1^2}, v_1 \right)_{(c_4, d_4)}$$

et

$$(u_3, v_3) \rightarrow \left( \frac{1}{1 + u_3^3 v_3^3 - v_3}, u_3 v_3 \right)_{(c_3, d_3)} \rightarrow \left( \frac{1 - u_3^3 v_3}{u_3(1 + u_3^3 v_3^3 - v_3)}, u_3 v_3 \right)_{(c_4, d_4)}$$

dont on déduit que  $\Delta_4''$  est contracté sur  $X = (0, 0)_{(c_4, d_4)}$  et que  $G_1$  est envoyé sur  $N$ .

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
(u_4, v_4) &\rightarrow (u_4 + 1, u_4 v_4)_{(r_3, s_3)} \rightarrow (u_4 v_4^2(u_4 + 1) : u_4^3 v_4^3(u_4 + 1) : 1 + u_4^2 v_4^3(u_4 + 1)) \\
&= \left( \frac{u_4 v_4^2(u_4 + 1)}{1 + u_4^2 v_4^3(u_4 + 1)}, \frac{u_4^3 v_4^3(u_4 + 1)}{1 + u_4^2 v_4^3(u_4 + 1)} \right)_{(x, y)} \\
&\rightarrow \left( \frac{u_4 v_4^2(u_4 + 1)}{1 + u_4^2 v_4^3(u_4 + 1)}, u_4 v_4 \right)_{(a_1, b_1)} \rightarrow \left( \frac{v_4(u_4 + 1)}{1 + u_4^2 v_4^3(u_4 + 1)}, u_4 v_4 \right)_{(c_2, d_2)}
\end{aligned}$$

et

$$(r_4, s_4) \rightarrow (r_4 s_4 + 1, s_4)_{(r_3, s_3)} \rightarrow (s_4(r_4 s_4 + 1) : s_4^2(r_4 s_4 + 1) : r_4 + (r_4 s_4 + 1)s_4^2);$$

il en résulte que  $Y = (0, 0)_{(r_4, s_4)}$  est indéterminé et  $M$  est envoyé sur  $H$ .

Finalement éclatons  $Y$  à la source et  $X$  au but

$$\begin{array}{lll}
\left\{ \begin{array}{l} r_4 = u_5 \\ s_4 = u_5 v_5 \end{array} \right. & \Lambda = \{u_5 = 0\} & \left\{ \begin{array}{l} c_4 = a_5 \\ d_4 = a_5 b_5 \end{array} \right. \quad \Omega = \{a_5 = 0\} \\
\left\{ \begin{array}{l} r_4 = r_5 s_5 \\ s_4 = s_5 \end{array} \right. & \Lambda = \{s_5 = 0\} & \left\{ \begin{array}{l} c_4 = c_5 d_5 \\ d_4 = d_5 \end{array} \right. \quad \Omega = \{d_5 = 0\}
\end{array}$$

Tout d'abord remarquons que  $\Delta_5''$  est envoyé sur  $\Omega$

$$(u_1, v_1) \rightarrow \left( \frac{u_1 v_1^2 - v_1}{u_1 + u_1 v_1^3 - v_1^2}, v_1 \right)_{(c_4, d_4)} \rightarrow \left( \frac{u_1 v_1 - 1}{u_1 + u_1 v_1^3 - v_1^2}, v_1 \right)_{(c_5, d_5)}.$$

Ensuite on a dans chacun des systèmes de coordonnées

$$(u_5, v_5) \rightarrow (u_5, u_5 v_5)_{(r_4, s_4)} \rightarrow ((u_5^2 v_5 + 1)v_5 : (u_5^2 v_5 + 1)u_5 v_5^2 : 1 + (u_5^2 v_5 + 1)u_5 v_5^2)$$

et

$$(r_5, s_5) \rightarrow (r_5 s_5, s_5)_{(r_4, s_4)} \rightarrow (r_5 s_5^2 + 1 : s_5(r_5 s_5^2 + 1) : r_5 + s_5(r_5 s_5^2 + 1)).$$

En particulier on note que  $\Lambda$  est envoyé sur  $\Delta_5''$ .

Notons  $\widehat{P}_1$  (resp.  $\widehat{P}_2$ ) le point infiniment proche obtenu en éclatant  $Q$ ,  $Q_1$ ,  $U$ ,  $W$  et  $Y$  (resp.  $R$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $V$  et  $X$ ). Les calculs qui précèdent permettent d'affirmer que  $f$  induit un isomorphisme entre  $\text{Bl}_{\widehat{P}_1} \mathbb{P}^2$  et  $\text{Bl}_{\widehat{P}_2} \mathbb{P}^2$  les composantes étant échangées comme suit

$$E \rightarrow F, \quad \Delta'' \rightarrow \Omega, \quad K \rightarrow L, \quad M \rightarrow H, \quad \Lambda \rightarrow \Delta'', \quad G \rightarrow N.$$

Pour qu'un conjugué de  $f$  soit un automorphisme d'entropie positive sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en  $\ell$  points il faut que  $\ell \geq 10$ ; on cherche donc un automorphisme  $A$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  tel que  $(Af)^2 A$  envoie  $\widehat{P}_2$  sur  $\widehat{P}_1$ . On remarque que  $f(R) = (0 : 1 : 1)$  et  $f^2(R) = Q$  puis que  $f^2(\widehat{P}_2) = \widehat{P}_1$

donc  $A = \text{id}$  convient. Les composantes sont échangées de la façon suivante

$$\begin{aligned} \Delta'' &\rightarrow f\Omega, & E &\rightarrow fF, & G &\rightarrow fN, & K &\rightarrow fL, & M &\rightarrow fH, \\ \Lambda &\rightarrow f\Delta'', & fF &\rightarrow f^2F, & fN &\rightarrow f^2N, & fL &\rightarrow f^2L, & fH &\rightarrow f^2H, \\ f\Omega &\rightarrow f^2\Omega, & f^2F &\rightarrow E, & f^2N &\rightarrow G, & f^2L &\rightarrow K, & f^2H &\rightarrow M, \\ f^2\Omega &\rightarrow \Lambda. \end{aligned}$$

Il s'en suit que la matrice caractéristique de  $f$  est donnée dans la base

$$\{\Delta'', E, G, K, M, \Lambda, fF, fN, fL, fH, f\Omega, f^2F, f^2N, f^2L, f^2H, f^2\Omega\}$$

par

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

la plus grande racine du polynôme caractéristique

$$(X^2 - 3X + 1)(X^2 - X + 1)(X + 1)^2(X^2 + X + 1)^3(X - 1)^4$$

de celle-ci est  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ , *i.e.* le premier degré dynamique de  $f$  est  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ . Remarquons que le polynôme  $\chi_{3,2}$  introduit dans le Théorème 6.1 est  $1 - 2X - 2X^2 + X^3$  dont la plus grande racine est  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ .

**1.2. Une famille de systèmes dynamiques.** Dans cette section nous allons voir un résultat permettant d'établir que la famille de transformations birationnelles considérée n'est pas triviale.

**Théorème 6.2 ([BKa]).** À  $c$  fixé, la famille de transformations définies par

$$f(y, z) = \left( z, -y + cz + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ pair}}}^{k-2} \frac{a_j}{y^j} + \frac{1}{y^k} \right), \quad a_j \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}, k \geq 2.$$

induit une famille de systèmes dynamiques de dimension  $k/2 - 1$ .

La stratégie est la suivante. Un tel  $f$  possède  $k+1$  points fixes que nous noterons  $p_1, \dots, p_{k+1}$ . Posons  $a = (a_1, \dots, a_{k-2})$ . BEDFORD et KIM montrent que les valeurs propres de  $Df_a$  au point  $p_j(a)$  dépendent de  $a$ ; il s'en suit que la famille varie avec  $a$  de manière non triviale. Plus précisément ils montrent que la trace de  $Df_a$  varie de manière non triviale. Désignons par  $\tau_j(a)$  la trace de la différentielle  $Df_a$  au point  $p_j(a)$  et considérons l'application  $T$  définie par

$$a \rightarrow T(a) = (\tau_1(a), \dots, \tau_{k+1}(a)).$$

1.2.1. *Première étape.* Le rang de l'application  $T$  est  $\frac{k}{2} - 1$  au point  $a = 0$ . En effet les points fixes de  $f$  sont de la forme  $(\xi_s, \xi_s)$  où  $\xi_s$  est une racine de

$$\xi = (c-1)\xi + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ pair}}}^{k-2} \frac{a_j}{\xi^j} + \frac{1}{\xi^k}. \quad (6.1)$$

Lorsque  $a$  est nul, on a pour tout point fixe  $\xi^{k+1} = \frac{1}{2-c}$ . En différenciant (6.1) par rapport aux  $a_\ell$  on obtient pour  $a = 0$  l'égalité

$$\left( 2 - c + \frac{k}{\xi^{k+1}} \right) \frac{\partial \xi}{\partial a_\ell} = \frac{1}{\xi^\ell}$$

dont on déduit

$$\frac{\partial \xi}{\partial a_\ell} \Big|_{a=0} = \frac{1}{(2-c)(k+1)\xi^\ell}.$$

La trace de  $Df_{(y,z)}$  est donnée par

$$\tau = c - \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ pair}}}^{k-2} \frac{ja_j}{y^{j+1}} - \frac{k}{y^{k+1}}.$$

Pour  $y = \xi_a$  on a

$$\frac{\partial \tau(\xi_a)}{\partial a_\ell} \Big|_{a=0} = -\frac{\ell}{y^{\ell+1}} + \frac{k(k+1)}{y^{k+2}} \frac{\partial \xi_a}{\partial a_\ell} = -\frac{\ell}{y^{\ell+1}} + \frac{k}{2-c} \frac{1}{\xi^{k+1}\xi^{\ell+1}} = -\frac{\ell}{y^{\ell+1}} + \frac{k}{y\xi^\ell} = \frac{k-\ell}{\xi^{\ell+1}}.$$

Si  $\xi_j$  parcourt les  $\frac{k}{2} - 1$  racines distinctes de  $\frac{1}{(2-c)^{k+1}}$ , la matrice est essentiellement une matrice de Vandermonde de taille  $(\frac{k}{2} - 1) \times (\frac{k}{2} - 1)$  donc de rang  $\frac{k}{2} - 1$ .



1.2.2. *Deuxième étape.* Désignons par  $f_a$  une transformation du type

$$\left(z, -y + cz + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ pair}}}^{k-2} \frac{a_j}{y^j} + \frac{1}{y^k}\right), \quad a_j \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}, k \geq 2.$$

Il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de 0 dans  $\mathbb{C}^{\frac{k}{2}-1}$  tel que pour tous  $a', a''$  dans  $\mathcal{U}$  avec  $a' \neq a''$  l'application  $f_{a'}$  n'est pas difféomorphe à  $f_{a''}$ . En effet, d'après ce qui précède l'application  $\mathbb{C}^{\frac{k}{2}-1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}, a \mapsto T(a)$  est localement injective au voisinage de 0. De plus pour  $a$  nul les points fixes  $p_1, \dots, p_{k+1}$ , et donc les valeurs  $\tau_1(0), \dots, \tau_{k+1}(0)$  sont distinctes. Par suite  $\mathbb{C}^{\frac{k}{2}-1} \ni a \mapsto \{\tau_1(a), \dots, \tau_{k+1}(a)\}$  est localement injective en 0. Ainsi si  $\mathcal{U}$  est un voisinage suffisamment petit de 0 et si  $a'$  et  $a''$  sont deux éléments distincts de  $\mathcal{U}$  les ensembles de multiplicateurs aux points fixes ne sont pas les mêmes ; il s'en suit que  $f_{a'}$  et  $f_{a''}$  ne sont pas difféomorphes.

**1.3. D'autres résultats.** Soient  $f$  une transformation satisfaisant le Théorème 6.1 ; notons  $Z_f$  la surface sur laquelle  $f$  est conjuguée à un automorphisme que l'on notera encore  $f$  pour simplifier. À l'aide de ce même théorème BEDFORD et KIM déterminent les courbes de  $Z_f$  invariantes par  $f$  (voir [BKa], Théorème 3.5). Ils en déduisent que si  $n > 2$ , alors  $(f, Z_f)$  est minimal ; de plus si  $n = 2$  il est minimal après avoir contracté  $\Delta$  (voir [BKa], Théorème 3.6).

À chaque  $f$  est donc associée une surface rationnelle  $Z = Z_f$  sur laquelle  $f$  est conjuguée à un automorphisme. Une question naturelle est la suivante : que peut-on dire de  $\text{Aut}(Z)$  ? Rappelons que  $\text{cr}$  est la représentation de  $\text{Aut}(Z)$  dans  $\text{GL}(\text{Pic}(Z))$  définie par (cf §1)

$$\text{cr} : \text{Aut}(Z) \rightarrow \text{GL}(\text{Pic}(Z)), \quad g \mapsto g_*.$$

BEDFORD et KIM montrent que dans tous les cas qu'ils considèrent  $\text{cr}$  est au plus  $((k^2 - 1) : 1)$  ; de plus si  $a_{k-2}$  est non nul,  $\text{cr}$  est fidèle. Lorsque  $n$  vaut 2, ils obtiennent le résultat suivant plus précis.

**Théorème 6.3 ([BKa]).** *Supposons que  $n$  soit égal à 2 et que*

$$f(y, z) = \left(z, -y + cz + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ pair}}}^{k-2} \frac{a_j}{y^j} + \frac{1}{y^k}\right), \quad a_j \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}, k \leq 2.$$

*soit conjugué à un automorphisme sur une surface rationnelle d'entropie  $\log \lambda_{n,k}$  où  $\log \lambda_{n,k}$*

*est la plus grande racine du polynôme  $\chi_{n,k} = 1 - k \sum_{j=1}^{n-1} x^j + x^n$ .*

*Soient  $\iota$  la réflexion  $(x, y) \mapsto (y, x)$  et  $\text{cr} : \text{Aut}(Z) \rightarrow \text{GL}(\text{Pic}(Z)), g \mapsto g_*$ .*

*L'image de  $\text{cr}$  est le sous-groupe de  $\text{GL}(\text{Pic}(Z))$  constitué des isométries qui préservent à la fois la classe canonique de  $Z$  et l'ensemble des diviseurs effectifs ; ce sous-groupe est le groupe diédral infini de générateurs  $f_*$  et  $\iota_*$ .*

Ils en déduisent, toujours pour  $n = 2$ , que génériquement les surfaces  $Z_a$  ne sont pas biholomorphiquement équivalentes.

**Théorème 6.4 ([BKa]).** *Supposons que  $n$  soit égal à 2, que  $k$  soit pair et supérieur ou égal à 4. Soient  $a$  dans  $\mathbb{C}^{k/2-1}$  et  $f_a$  une transformation du type*

$$\left( z, -y + cz + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ pair}}}^{k-2} \frac{a_j}{y^j} + \frac{1}{y^k} \right), \quad a_j \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}, k \geq 2.$$

*qui soit conjuguée à un automorphisme sur une surface rationnelle  $Z_a$ .*

*Il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de 0 dans  $\mathbb{C}^{k/2-1}$  tel que si  $a, a'$  sont deux points distincts de  $\mathcal{U}$  et si  $a_{k-1}$  est non nul, alors  $Z_a$  n'est pas biholomorphiquement équivalent à  $Z_{a'}$ .*

## 2. Dynamique des automorphismes d'entropie positive : domaines de rotation

Comme on l'a dit précédemment si  $Z$  est une surface complexe, compacte possédant un automorphisme  $f$  d'entropie topologique non nulle, un théorème de CANTAT assure qu'ou bien la dimension de KODAIRA de  $Z$  est nulle et dans ce cas  $f$  est conjugué à un automorphisme de l'unique modèle minimal de  $Z$  qui doit être un tore, une surface K3 ou une surface d'ENRIQUES ; ou bien la surface  $Z$  est rationnelle non minimale et  $f$  est birationnellement conjugué à une transformation birationnelle du plan ([Can99]). On a aussi vu que si  $Z$  est un tore complexe, l'ensemble de FATOU de  $f$  est vide. Si  $Z$  est une surface K3 ou un quotient d'une surface K3, l'existence d'une forme volume invariante implique que les seules composantes de FATOU possibles sont les domaines de rotation. MCMULLEN a montré l'existence de surfaces K3 non algébriques avec des domaines de rotation de rang 2 (voir [McM02]). Qu'en est-il si  $Z$  est une surface rationnelle non minimale ? Les automorphismes d'entropie positive sur les surfaces rationnelles non minimales peuvent posséder de « grands » domaines de rotation.

### 2.1. Énoncés.

**Théorème 6.5 ([BKb]).** *Il existe une surface rationnelle  $Z$  possédant un automorphisme d'entropie positive  $h$  et un domaine de rotation  $\mathcal{U}$ . De plus,  $\mathcal{U}$  est une union de disques de SIEGEL invariants sur chacun desquels  $h$  agit comme une rotation irrationnelle.*

La linéarisation est un outil remarquable pour prouver l'existence de domaines de rotations mais c'est une technique local. Afin de comprendre la nature globale de la composante de FATOU  $\mathcal{U}$ , BEDFORD et KIM introduisent un modèle global et obtiennent le résultat suivant.

**Théorème 6.6 ([BKb]).** *Il existe une surface  $\mathcal{L}$  obtenue en éclatant  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  en un nombre fini de points, un automorphisme  $L$  sur  $\mathcal{L}$ , un domaine  $\Omega$  de  $\mathcal{L}$  et une conjugaison biholomorphe  $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \Omega$  qui envoie  $(h, \mathcal{U})$  sur  $(L, \mathcal{L})$ .*

*En particulier,  $h$  n'a pas de point périodique sur  $\mathcal{U} \setminus \{z = 0\}$ .*

Les auteurs introduisent pour  $n, m \geq 1$  le polynôme

$$\chi_{n,m}(t) = \frac{t(t^{nm} - 1)(t^n - 2t^{n-1} + 1)}{(t^n - 1)(t - 1)} + 1.$$

Si  $n \geq 4, m \geq 1$  ou si  $n = 3, m \geq 2$  ce polynôme est un polynôme de SALEM. Soit  $\delta$  une racine de  $\chi_{n,m}$  qui ne soit pas une racine de l'unité. Pour  $1 \leq j \leq n-1, (j, n) = 1$  posons

$$c = 2\sqrt{\delta} \cos(j\pi/n)$$

et considérons la transformation birationnelle  $f$  donnée dans la carte affine  $z = 1$  par

$$f(x, y) = \left( y, -\delta x + cy + \frac{1}{y} \right).$$

Les auteurs montrent le résultat suivant.

**Théorème 6.7 ([BKb]).** *Il existe une surface rationnelle  $\mathcal{Z}$  obtenue en éclatant  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  en un nombre fini de points  $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  telle que  $\pi^{-1}f\pi$  soit un automorphisme de  $\mathcal{Z}$ . De plus, l'entropie de  $f$  est la plus grande racine du polynôme  $\chi_{n,m}$ .*

BEDFORD et KIM utilisent ensuite le couple  $(f^k, \mathcal{Z})$  pour démontrer les énoncés 6.5 et 6.6.

**2.2. Construction des automorphismes et des surfaces.** Nous allons détailler la construction de la surface  $\mathcal{Z}$  évoquée dans le Théorème 6.7.

La transformation  $f$  s'écrit en coordonnées homogènes  $(y^2: -\delta xy + cy^2 + z^2: yz)$ ; elle éclate exactement un point  $R = (1: 0: 0)$  et contracte exactement une droite  $\Delta' = \{y = 0\}$  sur le point  $Q = (0: 1: 0)$ .

Commençons par éclater  $R$  à gauche et  $Q$  à droite

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} y = u_1 \\ z = u_1 v_1 \end{array} \right. & E = \{u_1 = 0\} & \left\{ \begin{array}{l} x = a_1 \\ z = a_1 b_1 \end{array} \right. & F = \{a_1 = 0\} \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} y = r_1 s_1 \\ z = s_1 \end{array} \right. & \begin{array}{l} E = \{s_1 = 0\} \\ \Delta'_1 = \{r_1 = 0\} \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} x = c_1 d_1 \\ z = d_1 \end{array} \right. & F = \{d_1 = 0\} \end{array}$$

On a d'une part

$$\begin{aligned} (u_1, v_1) &\rightarrow (u_1, u_1 v_1)_{(y,z)} \rightarrow (u_1: -\delta + cu_1 + u_1 v_1^2: u_1 v_1) \\ &= \left( \frac{u_1}{-\delta + cu_1 + u_1 v_1^2}, \frac{u_1 v_1}{-\delta + cu_1 + u_1 v_1^2} \right)_{(x,z)} \rightarrow \left( \frac{u_1}{-\delta + cu_1 + u_1 v_1^2}, v_1 \right)_{(a_1, b_1)} \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} (r_1, s_1) &\rightarrow (r_1 s_1, s_1)_{(y,z)} \rightarrow (r_1^2 s_1 : -\delta r_1 + c r_1^2 s_1^2 + s_1 : r_1 s_1) \\ &= \left( \frac{r_1^2 s_1}{-\delta r_1 + c r_1^2 s_1^2 + s_1}, \frac{r_1 s_1}{-\delta r_1 + c r_1^2 s_1^2 + s_1} \right)_{(x,z)} \rightarrow \left( r_1, \frac{r_1 s_1}{-\delta r_1 + c r_1^2 s_1^2 + s_1} \right)_{(c_1, d_1)}. \end{aligned}$$

Il s'en suit que  $P = (0, 0)_{(r_1, s_1)}$  est d'indétermination,  $\Delta'_1$  est contracté sur  $S = (0, 0)_{(c_1, d_1)}$  et E est envoyé sur F.

Désormais on éclate  $P$  à gauche et  $S$  à droite

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} r_1 = u_2 \\ s_1 = u_2 v_2 \end{array} \right. & \quad G = \{u_2 = 0\} & \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = a_2 \\ d_1 = a_2 b_2 \end{array} \right. & \quad H = \{a_2 = 0\} \\ \left\{ \begin{array}{l} r_1 = r_2 s_2 \\ s_1 = s_2 \end{array} \right. & \quad G = \{s_2 = 0\} & \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = c_2 d_2 \\ d_1 = d_2 \end{array} \right. & \quad H = \{d_2 = 0\} \end{aligned}$$

On constate que

$$\begin{aligned} (u_2, v_2) &\rightarrow (u_2, u_2 v_2)_{(r_1, s_1)} \rightarrow (u_2^2 v_2 : -\delta + c u_2^3 v_2^2 + v_2 : u_2 v_2) \\ &= \left( \frac{u_2^2 v_2}{-\delta + c u_2^3 v_2^2 + v_2}, \frac{u_2 v_2}{-\delta + c u_2^3 v_2^2 + v_2} \right)_{(x,z)} \rightarrow \left( u_2, \frac{u_2 v_2}{-\delta + c u_2^3 v_2^2 + v_2} \right)_{(c_1, d_1)} \\ &\rightarrow \left( \frac{-\delta + c u_2^3 v_2^2 + v_2}{v_2}, \frac{u_2 v_2}{-\delta + c u_2^3 v_2^2 + v_2} \right)_{(c_2, d_2)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (r_2, s_2) &\rightarrow (r_2 s_2, s_2)_{(r_1, s_1)} \rightarrow (r_2^2 s_2^2 : -\delta r_2 + c r_2^2 s_2^3 + 1 : r_2 s_2) \\ &= \left( \frac{r_2^2 s_2^2}{-\delta r_2 + c r_2^2 s_2^3 + 1}, \frac{r_2 s_2}{-\delta r_2 + c r_2^2 s_2^3 + 1} \right)_{(x,z)} \rightarrow \left( r_2 s_2, \frac{r_2 s_2}{-\delta r_2 + c r_2^2 s_2^3 + 1} \right)_{(c_1, d_1)} \\ &\rightarrow \left( -\delta r_2 + c r_2^2 s_2^3 + 1, \frac{r_2 s_2}{-\delta r_2 + c r_2^2 s_2^3 + 1} \right)_{(c_2, d_2)}. \end{aligned}$$

Ainsi G est envoyé sur H et  $T = (0, \delta)_{(u_2, v_2)}$  est d'indétermination.

De plus

$$\begin{aligned} (y, z) &\rightarrow \left( \frac{y^2}{-\delta y + c y^2 + z^2}, \frac{y z}{-\delta y + c y^2 + z^2} \right)_{(x,z)} \rightarrow \left( \frac{y}{z}, \frac{y z}{-\delta y + c y^2 + z^2} \right)_{(c_1, d_1)} \\ &\rightarrow \left( \frac{-\delta y + c y^2 + z^2}{z^2}, \frac{y z}{-\delta y + c y^2 + z^2} \right)_{(c_2, d_2)} \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\Delta'_2$  est contracté sur  $U = (1, 0)_{(c_2, d_2)}$ .

Pour finir éclatons  $T$  à gauche et  $U$  à droite

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 = u_3 \\ v_2 = u_3 v_3 + \delta \end{array} \right. \quad K = \{u_3 = 0\} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_2 = a_3 + 1 \\ d_2 = a_3 b_3 \end{array} \right. \quad L = \{a_3 = 0\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 = r_3 s_3 \\ v_2 = s_3 + \delta \end{array} \right. \quad G = \{s_3 = 0\} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_2 = c_3 d_3 + 1 \\ d_2 = d_3 \end{array} \right. \quad L = \{d_3 = 0\}$$

On a

$$\begin{aligned} (u_3, v_3) &\rightarrow (u_3, u_3 v_3 + \delta)_{(u_2, v_2)} \rightarrow (u_3(u_3 v_3 + \delta) : v_3 + c u_3^2(u_3 v_3 + \delta)^2 : u_3 v_3 + \delta) \\ &= \left( \frac{u_3(u_3 v_3 + \delta)}{v_3 + c u_3^2(u_3 v_3 + \delta)^2}, \frac{u_3 v_3 + \delta}{v_3 + c u_3^2(u_3 v_3 + \delta)^2} \right)_{(y, z)} \rightarrow \left( u_3, \frac{u_3 v_3 + \delta}{v_3 + c u_3^2(u_3 v_3 + \delta)^2} \right)_{(c_1, d_1)} \end{aligned}$$

et

$$(r_3, s_3) \rightarrow (r_3 s_3, s_3 + \delta)_{(u_2, v_2)} \rightarrow (r_3^2 s_3(s_3 + \delta) : 1 + c r_3^3 s_3^2(s_3 + \delta)^2 : r_3(s_3 + \delta)).$$

Par suite  $K$  est envoyé sur  $\Delta = \{x = 0\}$ .

Enfin

$$(y, z) \rightarrow \left( \frac{-\delta y + c y^2 + z^2}{z^2}, \frac{y z}{-\delta y + c y^2 + z^2} \right)_{(c_2, d_2)} \rightarrow \left( \frac{c y^2 - \delta y}{z^2}, \frac{z^3}{(c y - \delta)(-\delta y + c y^2 + z^2)} \right)_{(a_3, b_3)}$$

en particulier  $\Delta'_3$  est envoyé sur  $L$ .

On peut donc énoncer le résultat suivant.

**Proposition 6.8.** *La transformation  $f$  induit un isomorphisme entre  $\text{Bl}_{R,P,T}\mathbb{P}^2$  et  $\text{Bl}_{Q,S,U}\mathbb{P}^2$ .*

Les différentes composantes sont échangées comme suit

$$E \rightarrow F, \quad G \rightarrow H, \quad K \rightarrow \Delta, \quad \Delta' \rightarrow L.$$

Supposons que  $n = 4$ , que  $\delta$  soit une racine de  $\chi_{4,1}$  et que  $c = 2\sqrt{\delta}\cos(\pi/4) = \sqrt{2}\sqrt{\delta}$  alors  $f^4(Q) = R$  donc quitte à éclater  $f^i(Q)$ ,  $f^i(S)$  et  $f^i(U)$  pour  $i = 0, \dots, 3$  la transformation  $f$  est conjuguée à un automorphisme sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en ces 12 points. On a

$$\begin{aligned} \Delta'' &\rightarrow fL, & E &\rightarrow fF, & G &\rightarrow fH, & K &\rightarrow f\Delta, & fF &\rightarrow f^2F, \\ fH &\rightarrow f^2H, & fL &\rightarrow f^2L, & f^2F &\rightarrow f^3F, & f^2H &\rightarrow f^3H, & f^2L &\rightarrow f^3L, \\ f^3F &\rightarrow E, & f^3H &\rightarrow G, & f^3L &\rightarrow K. \end{aligned}$$

Autrement dit la matrice de  $f^*$  dans la base

$$\{\Delta', E, G, K, fF, fH, fL, f^2F, f^2H, f^2L, f^3F, f^3H, f^3L\}$$

est donnée par

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

le polynôme caractéristique de cette matrice s'écrit  $(X+1)^2(X-1)^3(X^2+1)^2\chi_{4,1}$ . La plus grande valeur propre est en module proche de 1,7.

## CHAPITRE 7

### Une autre façon de construire des automorphismes d'entropie positive

Dans [DG10] les auteurs s'intéressent, entre autres, à la transformation

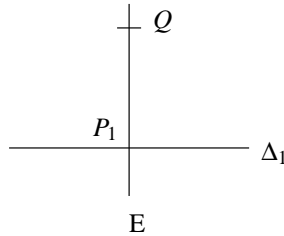
$$\Phi_n = (xz^{n-1} + y^n : yz^{n-1} : z^n), \quad n \geq 3.$$

Dans ce chapitre nous allons reprendre quelques-uns de leurs résultats ; pour simplifier les calculs nous supposons que  $n = 3$  et on désignera par  $\Phi$  la transformation  $\Phi_3$ . On constate que la suite  $(\deg \Phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée ( $\Phi^k = (x + ky^3, y)$  dans la carte affine  $z = 1$ ), donc  $\Phi$  est conjugué à un automorphisme sur une certaine surface rationnelle  $Z$  et un itéré de  $\Phi$  est conjugué à un automorphisme isotope à l'identité. La transformation  $\Phi$  éclate un unique point  $P = (1 : 0 : 0)$  et contracte une unique droite  $\Delta = \{z = 0\}$ .

#### 1. Construction

La première étape est la construction de deux points  $\hat{P}_1$  et  $\hat{P}_2$  infiniment proches de  $P$  tels que  $\Phi$  induise un isomorphisme entre  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en  $\hat{P}_1$  et  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en  $\hat{P}_2$ . La seconde étape consiste à trouver des automorphismes  $\varphi$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  tels que  $\hat{P}_1$ ,  $\varphi\hat{P}_2$ ,  $\varphi\Phi\varphi\hat{P}_2$  soient à supports distincts et  $\hat{P}_1 = (\varphi\Phi)^2\varphi\hat{P}_2$  donc tels que  $(\varphi\Phi)^2$  induise un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en  $\hat{P}_1$ ,  $\varphi\hat{P}_2$ ,  $\varphi\Phi\varphi\hat{P}_2$ .

**1.1. Définitions de  $\hat{P}_1$ ,  $\hat{P}_2$ .** Commençons par éclater le point  $P$  :



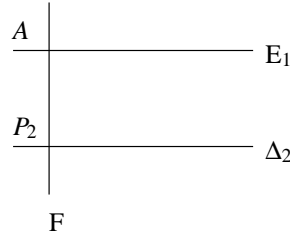
Posons  $y = u_1$  et  $z = u_1 v_1$ ; on remarque que  $(u_1, v_1)$  sont des coordonnées au voisinage de  $P_1 = (0, 0)_{(u_1, v_1)}$  dans lesquelles le diviseur exceptionnel est  $E = \{u_1 = 0\}$  et la transformée de  $\Delta$  est donnée par  $\Delta_1 = \{v_1 = 0\}$ . Posons  $y = r_1 s_1$  et  $z = s_1$ ; notons que  $(r_1, s_1)$  sont des coordonnées au voisinage de  $Q = (0, 0)_{(r_1, s_1)}$  dans lesquelles  $E = \{s_1 = 0\}$ . On remarque que

$$\begin{aligned} (u_1, v_1) &\rightarrow (u_1, u_1 v_1)_{(y, z)} \rightarrow (v_1^2 + u_1 : v_1^2 u_1 : v_1^3 u_1) \\ &= \left( \frac{v_1^2 u_1}{v_1^2 + u_1}, \frac{v_1^3 u_1}{v_1^2 + u_1} \right)_{(y, z)} \rightarrow \left( \frac{v_1^2 u_1}{v_1^2 + u_1}, v_1 \right)_{(u_1, v_1)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (r_1, s_1) &\rightarrow (r_1 s_1, s_1)_{(y, z)} \rightarrow (1 + r_1^3 s_1 : r_1 s_1 : s_1) \\ &= \left( \frac{r_1 s_1}{1 + r_1^3 s_1}, \frac{s_1}{1 + r_1^3 s_1} \right)_{(y, z)} \rightarrow \left( r_1, \frac{s_1}{1 + r_1^3 s_1} \right)_{(r_1, s_1)} ; \end{aligned}$$

il en résulte que  $P_1$  est un point d'indétermination,  $\Delta_1$  est contracté sur  $P_1$  et  $E$  est fixé. Éclatons  $P_1$  :



Posons  $u_1 = u_2$  et  $v_1 = u_2 v_2$ . Remarquons que  $(u_2, v_2)$  sont des coordonnées au voisinage de  $P_2 = (0, 0)_{(u_2, v_2)}$  dans lesquelles  $\Delta_2 = \{v_2 = 0\}$  et  $F = \{u_2 = 0\}$ . Si on pose  $u_1 = r_2 s_2$  et  $v_1 = s_2$  alors  $(r_2, s_2)$  sont des coordonnées au voisinage de  $A = (0, 0)_{(r_2, s_2)}$ ; dans ces coordonnées  $F = \{s_2 = 0\}$ . De plus

$$(u_2, v_2) \rightarrow (u_2, u_2 v_2)_{(u_1, v_1)} \rightarrow (1 + u_2 v_2^2 : u_2^2 v_2^2 : u_2^3 v_2^3)$$

et

$$(r_2, s_2) \rightarrow (r_2 s_2, s_2)_{(r_1, s_1)} \rightarrow (r_2 + s_2 : r_2 s_2^2 : r_2 s_2^3).$$

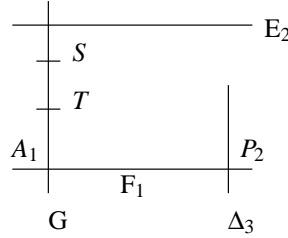


Notons que  $A$  est d'indétermination. On a aussi

$$\begin{aligned} (u_2, v_2) &\rightarrow (u_2, u_2 v_2)_{(u_1, v_1)} \rightarrow (1 + u_2 v_2^2 : u_2^2 v_2^2 : u_2^3 v_2^3) \rightarrow \left( \frac{u_2^2 v_2^2}{1 + u_2 v_2^2}, \frac{u_2^3 v_2^3}{1 + u_2 v_2^2} \right)_{(y, z)} \\ &\rightarrow \left( \frac{u_2^2 v_2^2}{1 + u_2 v_2^2}, u_2 v_2 \right)_{(u_1, v_1)} \rightarrow \left( \frac{u_2 v_2}{1 + u_2 v_2^2}, u_2 v_2 \right)_{(r_2, s_2)} \end{aligned}$$

d'où  $F$  et  $\Delta_2$  sont contractés sur  $A$ .

Éclatons  $A$  :



Posons  $r_2 = u_3$  et  $s_2 = u_3 v_3$ ;  $(u_3, v_3)$  sont des coordonnées au voisinage de  $A_1 = (0, 0)_{(u_3, v_3)}$ , coordonnées dans lesquelles  $F_1 = \{v_3 = 0\}$  et  $G = \{u_3 = 0\}$ . Si  $r_2 = r_3 s_3$  et  $s_2 = s_3$ , alors  $(r_3, s_3)$  est un système de coordonnées au voisinage dans lequel  $E_2 = \{r_3 = 0\}$  et  $G = \{s_3 = 0\}$ . On a

$$(u_3, v_3) \rightarrow (u_3, u_3 v_3)_{(r_2, s_2)} \rightarrow (1 + v_3 : u_3^2 v_3^2 : u_3^3 v_3^3),$$

$$(r_3, s_3) \rightarrow (r_3 s_3, s_3)_{(r_2, s_2)} \rightarrow (1 + r_3 : r_3 s_3^2 : r_3 s_3^3).$$

Le point  $T = (-1, 0)_{(r_3, s_3)}$  est d'indétermination. De plus

$$\begin{aligned} (u_3, v_3) &\rightarrow \left( \frac{u_3^2 v_3^2}{1 + v_3}, \frac{u_3^3 v_3^3}{1 + v_3} \right)_{(y, z)} \rightarrow \left( \frac{u_3^2 v_3^2}{1 + v_3}, u_3 v_3 \right)_{(u_1, v_1)} \\ &\rightarrow \left( \frac{u_3 v_3}{1 + v_3}, u_3 v_3 \right)_{(r_2, s_2)} \rightarrow \left( \frac{1}{1 + v_3}, u_3 v_3 \right)_{(r_3, s_3)}; \end{aligned}$$

d'où  $G$  est fixé et  $F_1$  contracté sur  $S = (1, 0)_{(r_3, s_3)}$ .

Éclatons  $T$  à gauche et  $S$  à droite



Posons  $r_3 = u_4 - 1$  et  $s_3 = u_4 v_4$ ; dans le système de coordonnées  $(u_4, v_4)$  on a  $G_1 = \{v_4 = 0\}$  et  $H = \{u_4 = 0\}$ . Notons aussi que  $(r_4, s_4)$ , où  $r_3 = r_4 s_4 - 1$  et  $s_3 = s_4$ , est un système de coordonnées dans lequel  $H = \{s_4 = 0\}$ . D'une part

$$\begin{aligned} (u_4, v_4) &\rightarrow (u_4 - 1, u_4 v_4)_{(r_3, s_3)} \rightarrow ((u_4 - 1)u_4 v_4^2, (u_4 - 1)u_4^2 v_4^3)_{(y, z)} \\ &\rightarrow ((u_4 - 1)u_4 v_4^2, u_4 v_4)_{(u_1, v_1)} \rightarrow ((u_4 - 1)v_4, u_4 v_4)_{(r_2, s_2)} \rightarrow \left( (u_4 - 1)v_4, \frac{u_4}{u_4 - 1} \right)_{(u_3, v_3)} \end{aligned}$$

par suite  $H$  est envoyé sur  $F_2$ ;  
d'autre part

$$(r_4, s_4) \rightarrow (r_4 s_4 - 1, s_4)_{(r_3, s_3)} \rightarrow (r_4 : (r_4 s_4 - 1) s_4 : (r_4 s_4 - 1) s_4^2);$$

il s'en suit que  $B = (0, 0)_{(r_4, s_4)}$  est d'indétermination.

Posons  $r_3 = a_4 + 1$ ,  $s_3 = a_4 b_4$ ;  $(a_4, b_4)$  sont des coordonnées dans lesquelles  $G_1 = \{b_4 = 0\}$  et  $K = \{a_4 = 0\}$ . On peut aussi poser  $r_3 = c_4 d_4 + 1$  et  $s_3 = d_4$  auquel cas  $(c_4, d_4)$  sont des coordonnées dans lesquelles  $K$  est donné par  $d_4 = 0$ .

Remarquons que

$$(u_3, v_3) \rightarrow \left( \frac{1}{1 + v_3}, u_3 v_3 \right)_{(r_3, s_3)} \rightarrow \left( -\frac{v_3}{1 + v_3}, -u_3(1 + v_3) \right)_{(a_4, b_4)} ;$$

par suite  $F_2$  est envoyé sur  $K$ .

On constate que

$$\begin{aligned} (u_1, v_1) &\rightarrow (v_1^2 + u_1 : u_1 v_1^2 : u_1 v_1^3) = \left( \frac{u_1 v_1^2}{u_1 + v_1^2}, \frac{u_1 v_1^3}{u_1 + v_1^2} \right)_{(y, z)} \rightarrow \left( \frac{u_1 v_1^2}{u_1 + v_1^2}, v_1 \right)_{(u_1, v_1)} \\ &\rightarrow \left( \frac{u_1 v_1}{u_1 + v_1^2}, v_1 \right)_{(r_2, s_2)} \rightarrow \left( \frac{u_1}{u_1 + v_1^2}, v_1 \right)_{(r_3, s_3)} \rightarrow \left( -\frac{v_1}{u_1 + v_1^2}, v_1 \right)_{(c_4, d_4)} ; \end{aligned}$$

ainsi  $\Delta_4$  est contracté sur  $C = (0, 0)_{(c_4, d_4)}$ .

Maintenant éclatons  $B$  à gauche et  $C$  à droite.



Posons  $r_4 = u_5$ ,  $s_4 = u_5 v_5$  et  $r_4 = r_5 s_5$ ,  $s_4 = s_5$ . Alors  $(u_5, v_5)$  (resp.  $(r_5, s_5)$ ) est un système de coordonnées dans lequel  $L = \{u_5 = 0\}$  (resp.  $H_1 = \{v_5 = 0\}$  et  $L = \{s_5 = 0\}$ ). Notons que

$$(u_5, v_5) \rightarrow (u_5, u_5 v_5)_{r_4, s_4} \rightarrow (1 : v_5(u_5^2 v_5 - 1) : u_5 v_5^2(u_5^2 v_5 - 1))$$

et

$$(r_5, s_5) \rightarrow (r_5 s_5, s_5)_{r_4, s_4} \rightarrow (r_5 : r_5 s_5^2 - 1 : s_5(r_5 s_5^2 - 1)).$$

On en déduit que  $L$  est envoyé sur  $\Delta_5$  et qu'il n'y a pas de point d'indétermination.

Posons  $c_4 = a_5$ ,  $d_4 = a_5 b_5$  et  $c_4 = c_5 d_5$ ,  $d_4 = d_5$ . Dans le premier (resp. second) système de coordonnées le diviseur exceptionnel  $M$  est donné par  $\{a_5 = 0\}$  (resp.  $\{d_5 = 0\}$ ). Notons que

$$(u_1, v_1) \rightarrow \left( -\frac{v_1}{u_1 + v_1^2}, v_1 \right)_{(c_4, d_4)} \rightarrow \left( -\frac{1}{u_1 + v_1^2}, v_1 \right)_{(c_5, d_5)};$$

en particulier  $\Delta_5$  est envoyé sur  $M$ .

La construction qui précède permet d'énoncer le résultat suivant.

**Proposition 7.1 ([DG10]).** Soit  $\hat{P}_1$  (resp.  $\hat{P}_2$ ) le point infiniment proche de  $P$  obtenu en éclatant  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  at  $P, P_1, A, T$  et  $U$  (resp.  $P, P_1, A, S$  et  $U'$ ).

La transformation  $\Phi$  induit un isomorphisme entre  $\text{Bl}_{\hat{P}_1} \mathbb{P}^2$  et  $\text{Bl}_{\hat{P}_2} \mathbb{P}^2$ .

Les différentes composantes sont échangées comme suit

$$\Delta \rightarrow M, \quad E \rightarrow E, \quad F \rightarrow K, \quad G \rightarrow G, \quad H \rightarrow F, \quad L \rightarrow \Delta.$$

Soit  $\phi$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Dans le paragraphe qui suit on va ajuster  $\phi$  de sorte que  $(\phi\Phi)^2\phi$  envoie  $\hat{P}_1$  sur  $\hat{P}_2$ .

**1.2. Conditions de recollement.** Soit  $g$  un germe de biholomorphisme de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  donné par

$$g(y, z) = \left( \sum_{0 \leq i, j \leq 4} m_{i,j} y^i z^j, \sum_{0 \leq i, j \leq 4} n_{i,j} y^i z^j \right) + o(\|(y, z)\|^4).$$

On remarque que  $g(0, 0) = (m_{0,0}, n_{0,0})$  donc  $g(P) = P$  si et seulement si  $m_{0,0} = n_{0,0} = 0$ . Dorénavant nous supposons que  $m_{0,0} = n_{0,0} = 0$ . Désignons par  $g^1$  (resp.  $g^2$ ) la première (resp. seconde) composante de  $g$ .

Posons  $y = u_1$  et  $z = u_1 v_1$ . Considérons la transformation  $g_1$  donnée par

$$g_1(u_1, v_1) = \left( g^1(u_1, u_1 v_1), \frac{g^2(u_1, u_1 v_1)}{g^1(u_1, u_1 v_1)} \right).$$

On remarque que  $g_1(0, 0) = \left( 0, \frac{n_{1,0}}{m_{1,0}} \right)$ ; ainsi  $g_1(0, 0) = (0, 0)$  si et seulement si  $n_{1,0} = 0$ .

Supposons dans la suite que  $n_{1,0} = 0$ .

Posons  $u_1 = r_2 s_2$  et  $v_1 = s_2$ . On définit  $g_2$  par

$$g_2(r_2, s_2) = \left( \frac{g_1^1(r_2 s_2, s_2)}{g_1^2(r_2 s_2, s_2)}, g_1^2(r_2 s_2, s_2) \right).$$

Alors  $g_2(0, 0) = (0, 0)$ , i.e.  $g_2(A) = A$ .

Posons  $r_2 = r_3 s_3$  et  $s_2 = s_3$ . Soit  $g_3$  la transformation donnée par

$$g_3(r_3, s_3) = \left( \frac{g_2^1(r_3 s_3, s_3)}{g_2^2(r_3 s_3, s_3)}, g_2^2(r_3 s_3, s_3) \right).$$

On peut vérifier que  $g_3(1, 0) = \left( \frac{m_{1,0}^3}{n_{0,1}^2}, 0 \right)$ . Il s'en suit que  $g_3(S) = T$  si et seulement si  $\frac{m_{1,0}^3}{n_{0,1}^2} = -1$ .

Supposons que  $m_{1,0} = t^2$  et que  $n_{0,1} = it^3$  auquel cas  $\frac{m_{1,0}^3}{n_{0,1}^2} = -1$ .

Finalement si  $r_3 = r_4 s_4 + 1$  et  $s_3 = s_4$ , on pose

$$g_4(r_4, s_4) = \left( \frac{g_3^1(r_4 s_4 + 1, s_4) + 1}{g_3^2(r_4 s_4 + 1, s_4)}, g_3^2(r_4 s_4 + 1, s_4) \right).$$

On note que  $g_4(0, 0) = \left( \frac{i(3m_{0,1}t + 2in_{2,0})}{t^4}, 0 \right)$ . On en déduit que  $g_4(0, 0) = (0, 0)$  si et seulement si  $3m_{0,1}t + 2in_{2,0} = 0$ .

Ceci permet d'énoncer la proposition qui suit.

**Proposition 7.2 ([DG10]).** *Un germe  $g$  de biholomorphisme de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  donné par*

$$g(y, z) = \left( \sum_{0 \leq i, j \leq 4} m_{i,j} y^i z^j, \sum_{0 \leq i, j \leq 4} n_{i,j} y^i z^j \right) + o(\|(y, z)\|^4)$$

*envoie  $\widehat{P}_2$  sur  $\widehat{P}_1$  si et seulement si*

$$m_{0,0} = n_{0,0} = 0, \quad n_{1,0} = 0, \quad m_{1,0} = t^2, \quad n_{0,1} = it^3, \quad 3m_{0,1}t + 2in_{2,0} = 0.$$

## 2. Une première famille d'automorphismes

La construction détaillée précédemment permet d'exhiber des familles d'automorphismes d'entropie positive. Avant de donner celle-ci introduisons la notion suivante. Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}^d$ ,  $\varphi: U \rightarrow \text{PGL}(3; \mathbb{C})$  une transformation holomorphe et  $f$  une transformation de CREMONA. La famille de transformations birationnelles  $(\varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} f)_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in U}$  est

*localement holomorphiquement triviale* si pour tout  $\alpha_0$  dans  $U$  il existe une application holomorphe d'un voisinage  $U_{\alpha_0}$  de  $\alpha_0$  dans  $\text{PGL}(3; \mathbb{C})$  telle que

$$M_{\alpha_0} = \text{Id}, \quad \forall \alpha \in U_{\alpha_0}, \quad \varphi_\alpha f = M_\alpha(\varphi_{\alpha_0} f) M_\alpha^{-1}.$$

**Théorème 7.3 ([DG10]).** *Soit  $\varphi_\alpha$  l'automorphisme du plan projectif complexe défini par*

$$\varphi_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 2(1-\alpha) & 2+\alpha-\alpha^2 \\ -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 1-\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

*La transformation  $\varphi_\alpha \Phi$  n'a pas de droite invariante et est conjuguée à un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en 15 points.*

*Le premier degré dynamique de  $\varphi_\alpha \Phi$  est  $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ .*

*La famille  $\varphi_\alpha \Phi$  est localement holomorphiquement triviale.*

*Démonstration.* La première assertion est donnée par la Proposition 7.2.

Passons à la seconde. Les différentes composantes sont échangées comme suit (§1.1)

$$\begin{aligned} \Delta &\rightarrow \varphi M, & E &\rightarrow \varphi E, & F &\rightarrow \varphi K, & G &\rightarrow \varphi G, & H &\rightarrow \varphi F, & L &\rightarrow \varphi \Delta, \\ \varphi E &\rightarrow \varphi \Phi \varphi E, & \varphi F &\rightarrow \varphi \Phi \varphi F, & \varphi G &\rightarrow \varphi \Phi \varphi G, & \varphi K &\rightarrow \varphi \Phi \varphi K, & \varphi M &\rightarrow \varphi \Phi \varphi M, & \varphi \Phi \varphi E &\rightarrow E, \\ \varphi \Phi \varphi F &\rightarrow F, & \varphi \Phi \varphi G &\rightarrow G, & \varphi \Phi \varphi K &\rightarrow H, & \varphi \Phi \varphi M &\rightarrow L, & & & & \end{aligned}$$

Ainsi dans la base  $\{\Delta, E, F, G, H, L, \varphi E, \varphi F, \varphi G, \varphi K, \varphi M, \varphi \Phi \varphi E, \varphi \Phi \varphi F, \varphi \Phi \varphi G, \varphi \Phi \varphi K, \varphi \Phi \varphi M\}$  la matrice de  $(\varphi \Phi)^*$  est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et son polynôme caractéristique est donné par

$$(X^2 - 3X + 1)(X^2 - X + 1)(X + 1)^2(X^2 + X + 1)^3(X - 1)^4.$$

Ainsi

$$\lambda(\varphi\Phi) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1.$$

Reste à justifier la dernière assertion : soit  $\alpha_0$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . On peut trouver localement autour de  $\alpha_0$  une matrice  $M_\alpha$  dépendant holomorphiquement de  $\alpha$  et tel que pour tout  $\alpha$  proche de  $\alpha_0$  on ait  $\varphi_\alpha\Phi = M_\alpha^{-1}\varphi_{\alpha_0}\Phi M_\alpha$ . La matrice

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_0 - \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

convient. □

### 3. D'autres exemples

Comme on l'a déjà mentionné, la construction détaillée précédemment est dans [DG10] faite pour  $\Phi = (xz^{n-1} + y^n : yz^{n-1} : z^n)$  pour  $n \geq 3$ . On peut donc obtenir des familles d'automorphismes d'entropie positive pour  $n \geq 3$ .

**Théorème 7.4** ([DG10]). *Supposons que  $n \geq 3$  et que*

$$\varphi_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2\beta}{\alpha} & -\frac{1+\delta_k+\delta_k^2}{\alpha} \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & \beta & \delta_k \end{bmatrix}$$

avec  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ,  $\beta \in \mathbb{C}$  et  $\delta_k = \exp\left(\frac{(2k+1)i\pi}{3n}\right) - 1$ ,  $0 \leq k \leq 3n-1$ .

*La transformation  $\varphi_{\alpha,\beta}\Phi$  est conjuguée à un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en  $3(2n-1)$  points.*

*Le premier degré dynamique de  $\varphi_{\alpha,\beta}\Phi$  est  $\lambda(\varphi_{\alpha,\beta}\Phi) = \frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2} > 1$ .*

*La famille  $\varphi_{\alpha,\beta}\Phi$  est localement holomorphiquement triviale.*

**Théorème 7.5** ([DG10]). *Supposons que  $n \geq 4$  et*

$$\varphi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \frac{\beta(\gamma^2\epsilon_k - \alpha^2)}{\delta(\alpha-\gamma)} \\ 0 & \gamma & 0 \\ \frac{\delta(\alpha-\gamma)}{\beta} & \delta & -\alpha \end{bmatrix}$$

avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma, \delta \in \mathbb{C}^*$ ,  $\alpha \neq \gamma$ ,  $\epsilon_k = \exp\left(\frac{(2k+1)i\pi}{n}\right)$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ .

*La transformation  $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\Phi$  est conjuguée à un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en  $4n-2$  points.*

Le premier degré dynamique de  $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\Phi$  est  $\lambda(\varphi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\Phi) = \frac{(n-1)+\sqrt{(n-1)^2-4}}{2} > 1$ .  
 La famille  $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\Phi$  est localement holomorphiquement triviale.

De plus, dans [DG10], les auteurs utilisent la même méthode avec une transformation birationnelle qui contracte une droite et une conique et obtiennent là encore une famille d'automorphismes d'entropie positive sur le plan projectif éclaté en un nombre fini de points.

**Théorème 7.6.** Soient  $f = (y^2z : x(xz + y^2) : y(xz + y^2))$  et

$$\varphi_{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{2\alpha^3}{343}(37i\sqrt{3}+3) & \alpha & -\frac{2\alpha^2}{49}(5i\sqrt{3}+11) \\ \frac{\alpha^2}{49}(-15+11i\sqrt{3}) & 1 & -\frac{\alpha}{14}(5i\sqrt{3}+11) \\ -\frac{\alpha}{7}(2i\sqrt{3}+3) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ .

La transformation  $\varphi_{\alpha}f$  est conjuguée à un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en 15 points.

Le premier degré dynamique de  $\varphi_{\alpha}f$  est  $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ .

The associated family of rational surfaces parameterized by  $\alpha$  is locally holomorphically trivial.





## Index

algébriquement stable	10, 17
anneau de HERMAN	40
automorphisme de HÉNON généralisé	5
automorphisme de type élémentaire	6
automorphisme de type HÉNON	6
automorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$	5
base géométrique	43
bassin	40
composante de FATOU récurrente	40
configuration exceptionnelle	43
couple $(\mathcal{X}, g)$ minimal	60
courbes contractées	8
cubique	48
cubique marquée	48
degré algébrique d'un automorphisme polynomial	6
degré algébrique	9
degré dynamique d'une transformation birationnelle	9
degré dynamique sur une surface complexe compacte kählérienne	15
dimension de KODAIRA-IITAKA	23
dimension de KODAIRA	23
disque de SIEGEL	40
diviseur	18
diviseur exceptionnel	9
domaine de rotation	39
dominante (application)	17
éclatement d'une variété	8
éclatement marqué	49
entropie topologique	26
ensemble critique	17
ensemble d'indétermination	8, 17

ensemble exceptionnel	8, 17
ensemble de FATOU	39
élément de COXETER	44
élément standard du groupe de WEYL	44
formellement linéarisable	25
foyer	40
groupe des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$	5
groupe des automorphismes affines	5
groupe des automorphismes élémentaires	5
groupe des automorphismes affines triangulaires	5
groupe de CREMONA	8
groupe de PICARD	18
groupe de WEYL	44
isomorphisme entre cubiques marquées	49
isomorphisme entre éclatements marqués	49
isomorphisme entre paires marquées	51
localement holomorphiquement triviale	23
linéairement équivalents	18
matrice caractéristique	22
modification propre	17
monôme résonant	25
multiplicativement indépendants	25
nombre de SALEM	29
paire marquée	51
points éclatés	8
point propre	22
polynôme de Salem	29
racine	46
racine simple	46
racine positive	46
rang du domaine de rotation	39
résolution ordonnée	22
résonance	25
simultanément diophantiens	25
surface K3	23
surface de COBLE	27
surface de ENRIQUES	24
surface minimale	24
surface de HIRZEBRUCH	19
transformation élémentaire	20
transformation rationnelle	7
transformation birationnelle	7
transformation de CREMONA	8
transformée stricte	18
transformée totale	18
variété kählérienne	14
vecteur positif	46
valeur propre dominante	48
vecteur propre dominant	48

## Bibliographie

- [Bea78] A. Beauville. *Surfaces algébriques complexes*. Société Mathématique de France, Paris, 1978. Avec une sommaire en anglais, Astérisque, No. 54.
- [BHPVdV04] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, and A. Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.
- [BKa] E. Bedford and K. Kim. Continuous families of rational surface automorphisms with positive entropy, [arxiv:0804.2078](#), 2008, to appear in *Math. Ann.*
- [BKb] E. Bedford and K. Kim. Dynamics of rational surface automorphisms : rotations domains, [arxiv:0907.3339](#), 2009.
- [BK06] E. Bedford and K. Kim. Periodicities in linear fractional recurrences : degree growth of birational surface maps. *Michigan Math. J.*, 54(3) :647–670, 2006.
- [BK09] E. Bedford and K. Kim. Dynamics of rational surface automorphisms : linear fractional recurrences. *J. Geom. Anal.*, 19(3) :553–583, 2009.
- [Bou81] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique*. Masson, Paris, 1981. Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6.
- [BR04] G. Bastien and M. Rogalski. Global behavior of the solutions of Lyness’ difference equation  $u_{n+2}u_n = u_{n+1} + a$ . *J. Difference Equ. Appl.*, 10(11) :977–1003, 2004.
- [BS91] E. Bedford and J. Smillie. Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbb{C}^2$ . II. Stable manifolds and recurrence. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(4) :657–679, 1991.
- [Can] S. Cantat. Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces. *To appear in Ann. of Math.*
- [Can99] S. Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(10) :901–906, 1999.
- [Can01] S. Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces  $K3$ . *Acta Math.*, 187(1) :1–57, 2001.
- [Cas01] G. Castelnuovo. Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano. *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino*, 36 :861–874, 1901.
- [CD] D. Cerveau and J. Déserti. *Transformations birationnelles de petit degré*, [arXiv:0811.2325](#), 2008.
- [Cob61] A. B. Coble. *Algebraic geometry and theta functions*. Revised printing. American Mathematical Society Colloquium Publication, vol. X. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.
- [Dés08] J. Déserti. Expériences sur certaines transformations birationnelles quadratiques. *Nonlinearity*, 21(6) :1367–1383, 2008.

- [DF01] J. Diller and C. Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6) :1135–1169, 2001.
- [DG10] J. Déserti and J. Grivaux. Special automorphisms of rational surfaces with positive topological entropy, [arxiv:1004.0656](#), 2010.
- [Dil] J. Diller. *Cremona transformations, surface automorphisms and the group law*, [arXiv:0811.3038](#), 2008.
- [Dil96] J. Diller. Dynamics of birational maps of  $\mathbf{P}^2$ . *Indiana Univ. Math. J.*, 45(3) :721–772, 1996.
- [DJS07] J. Diller, D. Jackson, and A. Sommese. Invariant curves for birational surface maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(6) :2793–2991 (electronic), 2007.
- [DO88] I. Dolgachev and D. Ortland. Point sets in projective spaces and theta functions. *Astérisque*, (165) :210 pp. (1989), 1988.
- [Dol08] I. V. Dolgachev. Reflection groups in algebraic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 45(1) :1–60 (electronic), 2008.
- [DS04] T.-C. Dinh and N. Sibony. Regularization of currents and entropy. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(6) :959–971, 2004.
- [DV36] P. Du Val. On the Kantor group of a set of points in a plane. *Proc. London Math. Soc.*, 42 :18–51, 1936.
- [DZ01] I. V. Dolgachev and D.-Q. Zhang. Coble rational surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(1) :79–114, 2001.
- [Fis76] G. Fischer. *Complex analytic geometry*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 538. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [FM89] S. Friedland and J. Milnor. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(1) :67–99, 1989.
- [Giz80] M. H. Gizatullin. Rational  $G$ -surfaces. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 44(1) :110–144, 239, 1980.
- [Gro87] M. Gromov. Entropy, homology and semialgebraic geometry. *Astérisque*, (145-146) :5, 225–240, 1987. Séminaire Bourbaki, Vol. 1985/86.
- [Gro03] M. Gromov. On the entropy of holomorphic maps. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4) :217–235, 2003.
- [Har85] B. Harbourne. Blowings-up of  $\mathbf{P}^2$  and their blowings-down. *Duke Math. J.*, 52(1) :129–148, 1985.
- [Har87] B. Harbourne. Rational surfaces with infinite automorphism group and no antipluricanonical curve. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 99(3) :409–414, 1987.
- [Har88] B. Harbourne. Iterated blow-ups and moduli for rational surfaces. In *Algebraic geometry (Sundance, UT, 1986)*, volume 1311 of *Lecture Notes in Math.*, pages 101–117. Springer, Berlin, 1988.
- [Her87] M.-R. Herman. Recent results and some open questions on Siegel’s linearization theorem of germs of complex analytic diffeomorphisms of  $\mathbf{C}^n$  near a fixed point. In *VIIIth international congress on mathematical physics (Marseille, 1986)*, pages 138–184. World Sci. Publishing, Singapore, 1987.
- [Hir88] A. Hirschowitz. Symétries des surfaces rationnelles génériques. *Math. Ann.*, 281(2) :255–261, 1988.

- [HM98] J. Harris and I. Morrison. *Moduli of curves*, volume 187 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Hum90] J. E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [HV00a] J. Hietarinta and C. Viallet. Discrete Painlevé I and singularity confinement in projective space. *Chaos Solitons Fractals*, 11(1-3) :29–32, 2000. Integrability and chaos in discrete systems (Brussels, 1997).
- [HV00b] J. Hietarinta and C. Viallet. Singularity confinement and degree growth. In *SIDE III—symmetries and integrability of difference equations (Sabaudia, 1998)*, volume 25 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 209–216. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [Isk85] V. A. Iskovskih. Proof of a theorem on relations in the two-dimensional Cremona group. *Uspekhi Mat. Nauk*, 40(5(245)) :255–256, 1985.
- [Jun42] H. W. E. Jung. Über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. Reine Angew. Math.*, 184 :161–174, 1942.
- [Kan95] S. Kantor. *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene*. 1895.
- [Koi88] M. Koitabashi. Automorphism groups of generic rational surfaces. *J. Algebra*, 116(1) :130–142, 1988.
- [Lam01] S. Lamy. L’alternative de Tits pour  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ . *J. Algebra*, 239(2) :413–437, 2001.
- [Loo81] E. Looijenga. Rational surfaces with an anticanonical cycle. *Ann. of Math. (2)*, 114(2) :267–322, 1981.
- [Man86] Y. I. Manin. *Cubic forms*, volume 4 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1986. Algebra, geometry, arithmetic, Translated from the Russian by M. Hazewinkel.
- [McM02] C. T. McMullen. Dynamics on  $K3$  surfaces : Salem numbers and Siegel disks. *J. Reine Angew. Math.*, 545 :201–233, 2002.
- [McM07] C. T. McMullen. Dynamics on blowups of the projective plane. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (105) :49–89, 2007.
- [Nag60] M. Nagata. On rational surfaces. I. Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, 32 :351–370, 1960.
- [Nag61] M. Nagata. On rational surfaces. II. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, 33 :271–293, 1960/1961.
- [Nik87] V. V. Nikulin. Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 654–671, Providence, RI, 1987. Amer. Math. Soc.
- [Noe69] M. Noether. Ueber die auf Ebenen eindeutig abbildbaren algebraischen Flächen. *Göttigen Nachr.*, pages 1–6, 1869.
- [Noe70] M. Noether. Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen. *Math. Ann.*, 3(2) :161–227, 1870.
- [Noe72] M. Noether. Zur Theorie der eindentlichen Ebenentransformationen. *Math. Ann.*, 5(4) :635–639, 1872.

- [Ogu] K. Oguiso. *The third smallest Salem number in automorphisms of K3 surfaces*, [arXiv:0905.2396](#), 2009.
- [PS81] R. Penrose and C. A. B. Smith. A quadratic mapping with invariant cubic curve. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 89(1) :89–105, 1981.
- [Ser77] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames,  $SL_2$* . Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
- [Sil91] J. H. Silverman. Rational points on K3 surfaces : a new canonical height. *Invent. Math.*, 105(2) :347–373, 1991.
- [Tak01a] T. Takenawa. Algebraic entropy and the space of initial values for discrete dynamical systems. *J. Phys. A*, 34(48) :10533–10545, 2001. Symmetries and integrability of difference equations (Tokyo, 2000).
- [Tak01b] T. Takenawa. Discrete dynamical systems associated with root systems of indefinite type. *Comm. Math. Phys.*, 224(3) :657–681, 2001.
- [Tak01c] T. Takenawa. A geometric approach to singularity confinement and algebraic entropy. *J. Phys. A*, 34(10) :L95–L102, 2001.
- [Wan95] L. Wang. Rational points and canonical heights on K3-surfaces in  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ . In *Recent developments in the inverse Galois problem (Seattle, WA, 1993)*, volume 186 of *Contemp. Math.*, pages 273–289. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [Wri92] D. Wright. Two-dimensional Cremona groups acting on simplicial complexes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 331(1) :281–300, 1992.
- [Yom87] Y. Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3) :285–300, 1987.
- [Zha01] D.-Q. Zhang. Automorphisms of finite order on rational surfaces. *J. Algebra*, 238(2) :560–589, 2001. With an appendix by I. Dolgachev.